

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN SIMON
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

**CALCULO
COMPUTARIZADO**

LIC. DEMETRIO JUCHANI B.

2009

CAPITULO 1	
1 Introducción.....	5
1.1 Sistemas de Números de punto flotante.....	5
1.2 Aritmética de punto flotante.....	5
1.3 teoría de Errores.....	5
1.3.1 Error absoluto.....	5
1.3.2 Error Relativo.....	5
1.3.3 Error por redondeo.....	5
1.3.4 Error Significativo.....	5
1.3.5 Error Propagado.....	5
1.3.6 Error por truncamiento.....	5
1.4 Precisión del Computador.....	5
1.5 Condición de un Problema.....	6
1.6 Ejercicios.....	6
CAPITULO 2	
2 Interpolación Polinomial.....	7
2.1 Polinomio de Interpolación de Lagrange.....	7
2.1.1 Cota del Error.....	7
2.2 Diferencias Divididas.....	8
2.3 Polinomio de Interpolación de Newton.....	8
2.4 Polinomio de Interpolación por Diferencias Finitas Progresivas de grado “ n “.....	8
2.5 Polinomio de Interpolación por Diferencias Finitas Retrógradas de grado “ n “.....	8
2.6 Interpolación por Splines Cúbicos.....	8
2.6.1 Construcción del spline Cúbico.....	9
2.7 Ejercicios.....	10
2.7.1 Polinomio de Lagrange.....	10
2.7.2 Polinomio de Newton.....	12
2.7.3 Splines Cúbicos.....	13
CAPITULO 3	
3 Ecuaciones No Lineales.....	16
3.1 Introducción.....	16
3.2 Método de Bisección.....	16
3.2.1 Teorema de Bisección.....	16
3.2.2 Número de Iteraciones.....	17
3.3 Ejercicios.....	17
3.4 Método de Punto Fijo.....	19
3.4.1 Teorema de Convergencia de Punto fijo.....	19
3.5 Ejercicios.....	19
3.6 Método de Newton – Raspón.....	22
3.7 Ejercicios.....	22
3.8 Sistemas de Ecuaciones No Lineales.....	23
3.9 Método de Newton.....	24
3.10 Ejercicios.....	24
3.11 Método de Punto Fijo.....	25
3.12 Ejercicios.....	25
CAPITULO 4	
4 Sistemas Lineales.....	27
4.1 Introducción.....	27
4.2 Norma para Vectores.....	27
4.3 Norma para Matrices.....	27

4.4 Estabilidad de un Algoritmo.....	27
4.5 Algoritmo estable para un Sistema Lineal.....	27
4.6 Condición de un Sistema Lineal.....	28
4.7 Número de Condición.....	28
4.7.1 Propiedades.....	28
4.8 Métodos Directos.....	29
4.8.1 Algoritmo de Gauss.....	29
4.8.2 Descomposición LU.....	30
4.8.3 Método de Cholesky.....	30
4.9 Métodos Iterativos.....	31
4.9.1 Método de Jacobi.....	31
4.9.2 Método de Gauss – Seidel.....	31
4.9.3 Criterios de Convergencia.....	32
4.10 Ejercicios.....	32

CAPITULO 5

5 Diferenciación e Integración Numérica.....	36
5.1 Diferenciación Numérica.....	36
5.1.1 Fórmulas de Tres Puntos.....	36
5.1.2 Fórmulas de Cinco Puntos.....	36
5.1.3 Fórmula para Derivada de Orden Superior.....	37
5.2 Ejercicios.....	37
5.3 Integración Numérica.....	39
5.3.1 Introducción.....	39
5.4 Fórmula de Cuadratura de Newton Cotes.....	40
5.5 Fórmula de los Trapecios.....	40
5.5.1 Error en la Fórmula de los Trapecios.....	41
5.6 Fórmula de Simpson (1/3).....	41
5.7 Fórmula de Simpson (3/8).....	41
5.8 Ejercicios.....	42
5.9 Métodos Numéricos para Integral doble.....	45
5.10 Ejercicios.....	46

CAPITULO 6

6 Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con valor nicial.....	47
6.1 Introducción.....	47
6.2 Método de Euler.....	48
6.3 Método de Euler Modificado.....	48
6.4 Método de Taylor de Orden “ n”.....	48
6.5 Método de Runge – Kutta de Orden Cuatro.....	48
6.6 Problemas de Condición Inicial de Orden Superior y Sistemas de Ecuaciones diferenciales.....	48
6.7 Ejercicios.....	49

ANEXO - CAPITULO 7

7 Ejemplos y Ejercicios en Matlab.....	55
7.1 Representación de un Polinomio.....	55
7.1.1 Evaluación de un Polinomio.....	55
7.1.2 Ajuste de Polinomios.....	56
7.2 Gráficos Bidimensionales.....	56
7.3 Interpolación.....	56
7.4 Gráficos, Splines con 3 y 5 Puntos.....	56
7.4.1 Aplicación de Spline, Gráfica de una Pieza.....	57

7.5 Ecuaciones No Lineales.....	57
7.5.1 Algoritmo de Newton.....	57
7.5.2 Sistema de Ecuaciones No Lineales.....	58
7.6 Sistemas Lineales.....	59
7.7 Normas de Vectores y Matrices.....	59
7.8 Resolución de Sistemas Lineales.....	60
7.9 Integración Numérica.....	60
7.9.1 Cuadratura de Simpson.....	60
7.9.2 Método de Simpson (1/3).....	60
7.9.3 Método de los Trapecios.....	61
7.10 Problemas de Condición Inicial.....	61
7.11 Práctica en Laboratorio de Matlab	62
7.11.1 Interpolación.....	62
7.11.2 Ecuaciones No Lineales.....	62
7.11.3 Sistemas Lineales.....	63
7.11.4 Integración Numérica.....	64
7.11.5 Problemas de Condición Inicial.....	65
7.12 Referencias Bibliográficas.....	65

CAPITULO 1

1.- INTRODUCCION:

1.1.- SISTEMA DE NUMEROS DE PUNTO FLOTANTE:

Sea F el conjunto de números de punto flotante, cada número $x \in F$ tiene la forma:

$$x = \pm(0.b_1b_2\dots b_t)_a a^n ; 1 \leq b_1 \leq a-1 ; 0 \leq b_i \leq a-1 ; i = 2, \dots, t$$

Donde a es la base, n exponente, t longitud.

1.2.- ARITMETICA DE PUNTO FLOTANTE.-

Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, se denota por:

$$x \oplus y = fl(fl(x) + fl(y))$$

$$x \ominus y = fl(fl(x) - fl(y))$$

$$x \otimes y = fl(fl(x) * fl(y))$$

$$x \oslash y = fl(fl(x) \div fl(y)); fl(y) \neq 0; y \neq 0$$

1.3.- TEORIA DE ERRORES:

1.3.1.- Error Absoluto.- $|p - p^*|$ donde p^* es un número aproximado de p .

1.3.2.- Error Relativo.- $\frac{|p - p^*|}{|p|}; p \neq 0$

1.3.3.- Error por redondeo.- Cuando se reemplaza un número por su forma de punto flotante, independientemente si esta redondeado por exceso o por defecto.

1.3.4.- Error significativo.- Cuando se restan números casi iguales o cuando se suman números casi iguales en magnitud pero de signos contrarios. También cuando se divide por un divisor relativamente pequeño.

1.3.5.- Error Propagado.- Es aquel error de salida, generado por un error en los datos de entrada. Suponiendo que todos los cálculos en el proceso se efectúan exactamente (sin error de redondeo).

1.3.6.- Error por Truncamiento.- Ocurre cuando un proceso que requiere un número infinito de pasos, se detiene en un número finito de estos. (no depende del sistema numérico que se utiliza). Ejm: el polinomio de Taylor.

1.4.- PRECISION DE UN COMPUTADOR.-

Definición.- eps es un número positivo más pequeño tal que: $fl(1 + eps) > 1$
 eps se llama precisión del computador.

El valor de eps en base 10 con l cifras en la mantisa es:

$$fl(0.100...049 * 10^1) = 1$$

$$fl(0.100...05 * 10^1) = 0.100...1 * 10^1 > 1$$

De donde: $eps = 5 * 10^{-l}$ y $eps = 2^{-l}$ en base dos.

OBS: Un número real y su forma de punto flotante se puede escribir como:

$$fl(x) = x(1 + \varepsilon) \text{ con } |\varepsilon| \leq eps$$

O como:

$$\bar{x} = x(1 + \varepsilon) \text{ con } |\varepsilon| \leq eps$$

1.5.- CONDICION DE UN PROBLEMA.- Sea $P(x)$ un problema dado por $P: R^n \rightarrow R$. La condición k de $P(x)$ es el número mas pequeño positivo k , tal que:

$$\frac{|\bar{x}_i - x_i|}{|x_i|} \leq eps \Rightarrow \frac{|P(\bar{x}) - P(x)|}{|P(x)|} \leq k \cdot eps$$

$P(x)$ es bien condicionado si k no es demasiado grande, sino el problema es mal condicionado.

1.6.- EJERCICIOS

1.- defina número de condición de un problema.

2.- defina error absoluto. Error relativo . Error por truncamiento.

3.- describa los elementos del conjunto de números de punto flotante.

4.- sabiendo que la ecuación $x - 2.01x = 1$ se resolvió por un método numérico obteniéndose el resultado $x = -0.97$

a) Hallar el error absoluto.

b) Hallar el error relativo.

5.- Sea $P: R^2 \rightarrow R / P(x, y) = x + y$ Hallar la condición del problema.

6.- Sea $P: R^2 \rightarrow R / P(x, y) = x - y$ Hallar la condición del problema.

7.-Sea $P: R^2 \rightarrow R / P(x, y) = xy$ Hallar la condición del problema.

8.- Sea $P: R^2 \rightarrow R / P(x, y) = \frac{x}{y}; y \neq 0$ Hallar la condición del problema.

9.- Sea $P: R^n \times R^n \rightarrow R / P(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i ; i = 1, \dots, n$ Hallar la condición del problema.

10.- Sea $P: R^2 \rightarrow R / P(x, y) = x^2 - y^2$ Hallar la condición del problema.

11.- Encuentre el polinomio de Taylor de grado 2 para $f(x) = x^2 - 3$ expandido alrededor de a) $x_0 = 1$; b) $x_0 = 0$

$$R. (x-1)^2 + 2(x-1) - 2$$

12.- Sea $f(x) = (1+x)^{-2}$, $x_0 = 0$, $x = 0.05$. Para un polinomio de grado tres hallar el error por truncamiento.

13.- Sea $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$, $x = -0.99$. Para un polinomio de grado tres hallar el error por truncamiento.

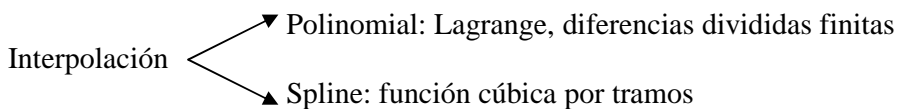
14.- Sea $f(x) = \ln(1+x)$. Encuentre el polinomio de Taylor de cuarto grado para f , alrededor de $x_0 = 0$ y úselo para aproximar $\ln(1.1)$. Encuentre el error por truncamiento.

CAPITULO 2 INTERPOLACION POLINOMIAL

Si se desea ajustar una curva a un conjunto de datos, lo lógico y la mínima exigencia que se hace a la curva es que pase por todos los puntos.

La principal diferencia que existe con los mínimos cuadrados, es que los últimos buscan un ajuste que minimiza distancias, pero no necesariamente exige que esta curva pase por los puntos.

La interpolación puede ser de dos formas:



Teorema.- (de aproximación de weierstrass). Sea f una función definida y continua en $[a, b]$, dado $\varepsilon > 0$. Existe un polinomio P definida en $[a, b]$ con la propiedad:

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon ; \quad \forall x \in [a, b]$$

2.1.- POLINOMIO DE INTERPOLACION DE LAGRANGE.

Teorema.- sean x_0, x_1, \dots, x_n ; $(n+1)$ puntos diferentes y f una función cuyos valores están dados en éstos puntos, entonces existe un único polinomio P de grado n con la propiedad:

$$f(x_k) = P(x_k) ; \quad k = 0, 1, \dots, n$$

El polinomio es:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n L(x_k) f(x_k) ; \text{ donde } L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} ; \quad k = 0, 1, \dots, n$$

2.1.1.- COTA DEL ERROR.

$$e(x) = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \right| ; \quad x_0 < \xi(x) < x_n$$

2.2.- DIFERENCIAS DIVIDIDAS.

Definición.- Sean $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$, las x_i diferentes entre si. Las diferencias divididas de orden k se define como:

$$\begin{aligned} f[x_i] &= f(x_i) \\ f[x_i, x_{i+1}] &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \\ &\vdots \\ f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \end{aligned}$$

2.2.1.- POLINOMIO DE INTERPOLACION DE NEWTON.

Teorema.- El polinomio de interpolación de newton por diferencias divididas de grado n que pasa por

$$(x_i, f(x_i)); i = 0, 1, \dots, n$$

Esta dado por:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$$

2.2.2.- POLINOMIO DE INTERPOLACION POR DIFERENCIAS FINITAS PROGRESIVAS DE GRADO “n”.

Para x_0, x_1, \dots, x_n

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0) \quad ; \text{ donde } s = \frac{x - x_0}{h}$$

2.2.3.- POLINOMIO DE INTERPOLACION POR DIFERENCIAS FINITAS RETROGRADAS DE GRADO “n”.

Para $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{s}{k} \nabla^k f(x_n) \quad ; \text{ donde } s = \frac{x - x_n}{h}$$

2.3.- INTERPOLACION POR SPLINES.

Spline es una función cúbica por tramos, es decir, hace un ajuste polinomial cúbico entre dos puntos. Este ajuste hace para todos los puntos que se dispongan. La ventaja es que al ser de grado 3, no oscila como un polinomio de alto grado.

Definición.- Dada una función $f : R \rightarrow R$ y un conjunto de números llamados nodos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, un spline cúbico S para f es una función $S : R \rightarrow R$ que cumple las siguientes condiciones:

- S_j es un polinomio cúbico en $[x_j, x_{j+1}]$; $j = 0, 1, \dots, n-1$
- $S(x_j) = f(x_j)$; $j = 0, 1, \dots, n$; pasa por todos los puntos.
- $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$; $j = 0, 1, \dots, n-2$; es continua, no tiene cortes o esquinas.
- $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$; $j = 0, 1, \dots, n-2$; es diferenciable en todos los puntos.

e) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$; $j = 0, 1, \dots, n-2$; curvatura mínima.

f) Si $S''(x_0) = S''(x_n)$; spline natural.

Si $S'(x_0) = S'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ spline con frontera fija.

2.3.1.- CONSTRUCCION DEL SPLINE CUBICO.

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j)c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 ; j = 0, 1, \dots, n-1$$

Hacemos: $h_j = x_{j+1} - x_j$; $j = 0, 1, \dots, n-1$

Cálculo de a_j .-

$$a_j = f(x_j) ; j = 0, 1, \dots, n$$

Cálculo de b_j .-

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}) ; j = 0, 1, \dots, n-1$$

Cálculo de d_j .-

$$d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} ; j = 0, 1, \dots, n-1$$

Cálculo de c_j .- la forma matricial de un spline cúbico, con $c_0 = 0$, $c_n = 0$ es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & & \vdots \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & & & & 0 \\ \vdots & & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

2.4.- EJERCICIOS

2.4.1.-POLINOMIO DE LAGRANGE.

Para los ejercicios 1 – 5. Use el polinomio de Lagrange apropiados de grado uno, dos, tres y cuatro para aproximar:

1.- $f(2.5)$ si:

x	$f(x)$
2.0	0.5103757
2.2	0.5207843
2.4	0.5104147
2.6	0.4813306
2.8	0.4359160

	<i>Ptos</i>	<i>Grado</i>	<i>Aproximacion</i>
	2.4;2.6	1	0.4958727
R.	2.2;2.4;2.6	2	0.4982120
	2.2;2.4;2.6;2.8	3	0.4980630
	<i>todos</i>	4	0.4980705

2.- $f(0)$ si:

x	$f(x)$
-0.3	-0.20401
-0.1	-0.08993
0.1	0.11007
0.3	0.39569
0.5	0.79845

	<i>Ptos</i>	<i>Grado</i>	<i>Aproximacion</i>
	-0.1;0.1	1	0.010070
R.	-0.3;-0.1;0.1	2	-0.00063250
	-0.3;-0.1;0.1;0.3	3	-0.00063250
	<i>todos</i>	4	0.00010625

3.- $f(1.25)$ si:

x	$f(x)$
1.0	0.24255
1.1	0.48603
1.2	0.86160
1.3	1.59751
1.4	3.76155

	<i>Ptos</i>	<i>Grado</i>	<i>Aproximacion</i>
	1.2;1.3	1	1.22956
R.	1.1;1.2;1.3	2	1.18451
	1.1;1.2;1.3;1.4	3	1.11778
	<i>todos</i>	4	1.13745

4.- $f(0.5)$ si:

x	$f(x)$
0.2	0.9798652
0.4	0.9177710
0.6	0.8080348
0.8	0.6386093
1.0	0.3843735

	<i>Ptos</i>	<i>Grado</i>	<i>Aproximacion</i>
	0.4;0.6	1	0.8629029
R.	0.2;0.4;0.6	2	0.8688582
	0.2;0.4;0.6;0.8	3	0.8696111
	<i>todos</i>	4	0.8693047

5.- $f(0.2)$ si:

x	$f(x)$
0.1	1.2314028
0.3	1.9121188
0.4	2.3855409
0.5	2.9682818
0.6	3.6801169

	<i>Ptos</i>	<i>Grado</i>	<i>Aproximacion</i>
	0.1;0.3	1	1.5717608
R.	0.1;0.3;0.4	2	1.5274061
	0.1;0.3;0.4;0.5	3	1.5325585
	<i>todos</i>	4	1.5316948

6.- Sea $f(x) = 3xe^x - 2e^x$. Aproxime $f(1.03)$ usando el polinomio de Lagrange de grado dos, con $x_0 = 1$, $x_1 = 1.05$ y $x_2 = 1.07$. Hallar la cota del error.

7.- sea $f(x) = e^x$, $0 \leq x \leq 2$. Usando los valores dados, efectúe los siguientes cálculos:

- Aproxime $f(0.25)$ usando interpolación lineal con $x_0 = 0$ $x_1 = 0.5$.
- Aproxime $f(0.75)$ usando interpolación lineal con $x_0 = 0.5$ $x_1 = 1$.

c) Aproxime $f(0.25)$ y $f(0.75)$ usando el polinomio de interpolación de segundo grado con $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

R: 1.32436, 2.18350, 1.15277, 2.01191.

8.- a) use el polinomio de interpolación de lagrange de segundo grado para aproximar $f(2.05)$, con $x_0 = 1.5$, $x_1 = 2.0$, $x_2 = 2.5$ si $f(x) = \sqrt{7x}$

b) Calcular la cota del error para el polinomio de a).

9.- Dada la función $f(x) = \sin 2x$ definida en el intervalo $[0, 1]$. Calcular la cota del error sabiendo que se ha aproximado $f(0.3)$ con un polinomio de lagrange de grado tres.

10.- Para los datos de la tabla:

Año	Poblacion (miles)
1930	123203
1940	131669
1950	150697
1960	179323
1970	203212
1980	226505

Hallar el polinomio de Lagrange de grado 5 que ajusta estos datos y use este polinomio para estimar la población en el año 1965.

R. 192407000

2.4.2.- POLINOMIO DE NEWTON.

1.- Demostrar que:

$$f[x_1, x_2] = f[x_2, x_1]$$

2.- demostrar que:

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_1, x_0, x_2]$$

3.- Con los datos:

x	$f(x)$
0.0	-7.00000
0.1	-5.89483
0.3	-5.65014
0.6	-5.17788
1.0	-4.28172

a) Hallar $f(0.2)$ con el polinomio de newton de grado dos

b) Hallar el polinomio de newton de grado cuatro.

R: $-7 + 11.0517x - 32.7608x(x-0.1) + 55.7706x(x-0.1)(x-0.3) - 55.4925x(x-0.1)(x-0.3)(x-0.6)$

4.- Se tiene los datos:

x	$f(x)$
0.0	1.00000
0.2	1.22140
0.4	1.49182
0.6	1.82212
0.8	2.22554

Hallar $f(0.05)$ con el polinomio de newton de grado cuatro.

R. 1.05126

5.- Para los datos de la tabla:

Año	Poblacion (miles)
1930	123203
1940	131669
1950	150697
1960	179323
1970	203212
1980	226505

Use un polinomio de newton apropiado para aproximar la población en el año 1965.

6.- Hallar un polinomio de segundo grado tal que, $f[2]=3$; $f[-1, 2, 5]=7$; $f'(2) = 20$

R: $7x^2 - 8x - 9$

7.- Construir un polinomio de grado tres si se conocen: $x_2 = -3$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$ y $f[x_3] = 8$, $f[x_2, x_3] = 3$, $f[x_2, x_3, x_4] = 2$ y pasa por el punto (1, 10)

R: $2.58x^3 + 9.75x^2 + 2.67x - 4.99$

2.4.3.- TRAZADOR CUBICO (Splines Cúbicos).

1.- Enuncie las propiedades de los splines cúbicos.

Para los ejercicios 2 – 7. Use interpolación de trazador cúbico natural para aproximar:

2.- $f(2.5)$ si:

X	f(x)
2.2	0.5207843
2.4	0.5104147
2.6	0.4813306

R: 0.4976272

3.- $f(5.3)$ si:

X	f(x)
5.0	2.168861
5.2	1.797350
5.4	1.488591

R: 1.637087

4.- $f(0)$ con:

X	f(x)
-0.3	-0.20431
-0.1	-0.08993
0.1	0.11007
0.3	0.39569

R: -0.00277301

5.- $f(1.25)$ si:

X	f(x)
1.1	0.48603
1.2	0.86160
1.3	1.59751
1.4	3.76155

R: 1.09542

6.- $f(0.5)$ si:

X	f(x)
0.2	0.9798652
0.4	0.9177710
0.6	0.8080348
0.8	0.6386093
1.0	0.3843735

R: 0.8695049

7.- $f(0.2)$ si:

X	f(x)
0.1	1.2314028
0.3	1.9121188
0.4	2.3855409
0.5	2.9682818
0.6	3.6801169

R: 1.542323

8.- Sea:

X	f(x)
2	0.5134
2.5	0.4346
3	0.3679

a) Construir los splines cúbicos naturales.

b) Aproximar $f'(2.3)$ y $f''(2.3)$

c) comparar b) con los valores reales si: $f(x) = e^{-\frac{x}{3}}$

9.- Sea:

X	f(x)
0.0	1.0
0.25	0.707
0.5	0.0

a) Construir los splines cúbicos naturales.

b) Mediante spline de a) calcular la integral: $\int_0^{0.25} f(x)dx$

- 10.- a) Con los datos de la tabla construir un spline cúbico para aproximar $\sin 0.34$
b) Usando el spline construido en a) aproxime $\cos 0.34$

c) Con el spline construido en a) aproximar $\int_{0.30}^{0.35} \sin x dx$

x	Senx	$D_x(\sin x) = \cos x$
0.30	0.29552	0.95534
0.32	0.31457	0.94924
0.35	0.34290	0.93937

R: a) 0.33348, b) 0.94270, c) 0.015964

- 11.- Sea $f(x) = \cos \pi x$, cuyos valores de x son:

X	f(x)
0.0	
0.25	
0.5	
0.75	
1.0	

a) Construir los splines cúbicos naturales.

b) Integre los splines sobre el intervalo $[0, 1]$ y compare el resultado con

$$\int_0^1 \cos \pi x dx = 0$$

- c) Use las derivadas de los splines para aproximar $f'(0.5)$ y $f''(0.5)$
Comparar estas aproximaciones con los valores reales.

$$R. \int_0^1 S(x)dx = 0.000000; S'(0.5) = -3.24264; S''(0.5) = -0.000019$$

- 12.- Para los datos de la tabla:

Año	Población (miles)
1930	123203
1940	131669
1950	150697
1960	179323
1970	203212
1980	226505

a) Hallar los splines cúbicos

b) Predecir la población en el año 1965

R. 191844000

CAPITULO 3 ECUACIONES NO LINEALES.

3.1.- INTRODUCCION.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ El problema es calcular la solución de la ecuación no lineal $f(x)=0$

Mas aun si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ representa un sistema de ecuaciones no lineales (Las cuales aparecen en la optimización y en la solución numérica de problemas de frontera no lineales).

Teorema (fundamental del álgebra).- Sea $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ de grado n , entonces $P(x)$ tiene exactamente n ceros contando con su multiplicidad.

Teorema (T.V.I.).- Sea f una función continua en $[a, b]$ y k un número cualquiera entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe un número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$

Teorema (Existencia y unicidad para la solución de una ecuación).- Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua:

La ecuación $f(x)=0$ tiene una y solo una solución

$$\Leftrightarrow \exists a, b \in I \text{ tal que } f(a)f(b) < 0$$

3.2.- METODO DE BISECCION.- el método de bisección se basa en el teorema del valor intermedio y divide repetidamente los subintervalos de $[a, b]$, hasta hacer lo mas pequeño posible a la tolerancia.

algoritmo de bisección.-

Sea $x \in [a, b]$ donde $f(a)f(b) < 0$

hacemos: $a_1 = a, b_1 = b, x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$

a) si $f(x_1) = 0$ termina el proceso y la solución es $x = x_1$

b) si $f(a_1) * f(x_1) < 0 \Rightarrow x \in [a_1, x_1]$

luego: $a_2 = a_1, b_2 = x_1, x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$ continua el proceso.

c) si $f(x_1) * f(b_1) < 0 \Rightarrow x \in [x_1, b_1]$

luego: $a_2 = x_1, b_2 = b_1, x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$ continua el proceso.

El proceso genera una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ el cual se detiene cuando $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, donde

$\varepsilon > 0$ es la tolerancia

3.2.1.- TEOREMA DE LA BISECCION.- sea $f \in C[a, b]$ y $f(a) * f(b) < 0$. El algoritmo de bisección genera una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que aproxima a x con la propiedad:

$$|x_n - x| \leq \frac{b - a}{2^n}, n \geq 1$$

Cuya sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a la raíz x , es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

Demostración.- Al principio

$$\begin{aligned}
 b_1 - a_1 &= \frac{1}{2^0}(b-a), \quad x \in (a_1, b_1) \\
 b_2 - a_2 &= \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{1}{2^1}(b-a), \quad x \in (a_2, b_2) \\
 b_3 - a_3 &= \frac{1}{2}(b_2 - a_2) = \frac{1}{2^2}(b-a), \quad x \in (a_3, b_3) \\
 &\vdots \\
 b_n - a_n &= \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{1}{2^{n-1}}(b-a), \quad x \in (a_n, b_n)
 \end{aligned}$$

Puesto que $x_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $\forall n \geq 1$

$$|x_n - x| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2^n}(b-a)$$

3.2.2.- NUMERO DE ITERACIONES.- Para una tolerancia ε

$$\begin{aligned}
 |x_n - x| &\leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2^n}(b-a) < \varepsilon \\
 n &> \frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2}
 \end{aligned}$$

3.3.- EJERCICIOS

1.- En que teorema se basa el método de bisección? Enunciar.

2.- Demuestre que $f(x) = x^3 - x - 1$ tiene exactamente una raíz en el intervalo $[1, 2]$.

Luego hallar dicha solución con $\varepsilon = 10^{-2}$ por bisección. R. 1.3203125

3.- Hallar la solución por el método de bisección para $\varepsilon = 10^{-2}$ si:

$$x = \tan x \text{ en } [4, 4.5] \quad ; \quad \text{R. 4.4921875}$$

4.- Hallar la solución por el método de bisección para $\varepsilon = 10^{-5}$ si:

$$x - 2^{-x} = 0 \text{ para } [0, 1] \quad \text{R. 0.6411819}$$

5.- Hallar la solución por el método de bisección para $\varepsilon = 10^{-5}$ si:

$$e^x + 2^{-x} + 2 \cos x - 6 = 0 \text{ para } [1, 2] \quad \text{R. 1.8293839}$$

6.- Hallar la solución por el método de bisección para $\varepsilon = 10^{-5}$ si:

$$e^x - x^2 + 3x - 2 = 0 \text{ para } [0, 1] \quad \text{R. 0.2575302}$$

7.- Aproximar $\sqrt[3]{25}$ por el método de bisección. para $\varepsilon = 10^{-4}$

(sugerencia: considere $f(x) = x^3 - 25$) R. 2.924011

8.- Hallar el numero de iteraciones “n” para aproximar la solución con $\varepsilon = 10^{-4}$ si:

$$x^3 - x - 1 = 0 \text{ en } [1, 2] \quad \text{R. } 14 ; 1.324768$$

9.- Hallar el numero de iteraciones “n” para aproximar la solución con $\varepsilon = 10^{-3}$ si:

$$x^3 + x - 4 = 0 \text{ en } [1, 4]$$

10.- Resolver $x^3 - 2x - 1 = 0$ en $[1, 2]$ por el método de bisección para $\varepsilon = 0.005$

11.- Hallar la solución por el método de bisección con un error de 10^{-2} de la ecuación

$$x^2 + x \ln(3x - 2) - 2 = 0 \quad \text{R: } 1.1992$$

12.- Dado $f(x) = x^2 e^x - 1$

a) Localice la o las soluciones de la ecuación $f(x)=0$

b) Efectúe tres iteraciones para aproximar la raíz, por el método de bisección.

13.- El polinomio $x^3 - 2x - 1 = 0$, tiene una raíz entre 1 y 2. Usando el método de bisección hallar esta raíz con un error de $\varepsilon = 0.005$. R: 1.6210937

14.- Encontrar las raíces del polinomio:

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

a) ¿Cuántas raíces reales tiene?

b) ¿Cuántas raíces imaginarias tiene?

c) Hallar una raíz por bisección para $\varepsilon = 0.0005$.

R: a)3 b) 0 c) -1,246982 0,4450418 1,8019369

15.- Encuentre las raíces positivas por el método de bisección para $\varepsilon = 0.001$.

(determine un intervalo apropiado para la raíz)

$$\tan x - x + 1 = 0 ; 0 < x < 3\pi$$

R. [3.14, 4.71] ; 4.4283

[6.28, 7.85] ; 7.7056

16.- Lo mismo que en el ejercicio 15. si:

$$\text{sen } x - 0.3e^x = 0 ; x > 0$$

R. [0, 1] ; 0.5419

[1, 2] ; 1.0765

17.- Calcule los intervalos apropiados para la ecuación y determine las soluciones por el método de bisección para $\varepsilon = 0.001$.

$$\ln x - 0.2x^2 + 1 = 0$$

R. [0.3, 0.4] ; 0.3786

[3.3, 3.4] ; 3.3155

18.- Lo mismo que en el ejercicio 17. si:

$$x + \frac{1}{(x+3)x} = 0$$

R. [-3.2, -3.1] ; -3.1038

3.4.- METODO DE PUNTO FIJO

El método determina la solución de una ecuación $f(x) = 0$ expresando en la forma:

$$g(x) = x$$

a una solución de esta ecuación se llama punto fijo de g .

Ejm: $g(x) = 2x - 1$ tiene un solo punto fijo en $[0, 2]$ y es $x = 1$

$g(x) = x$ tiene punto fijo en cada $x \in [1, 2]$

$g(x) = x - \sin \pi x$ tiene dos puntos fijos en $[0, 1]$ y son $x = 0$, $x = 1$

Convergencia y divergencia del método de punto fijo: si

$$g'(x) > 1$$

diverge

$$0 < g'(x) < 1$$

converge

$$-1 < g'(x) < 0$$

converge

$$g'(x) < -1$$

diverge

Teorema (existencia y unicidad de punto fijo).-

Existencia.

Si $g \in C[a, b]$ y $g(x) \in [a, b]$, $\forall x \in [a, b]$. Entonces g tiene un punto fijo x en $[a, b]$.

Unicidad.

Si además existe $g'(x)$ en (a, b) con: $|g'(x)| \leq k < 1$, $\forall x \in (a, b)$. Entonces g tiene un punto fijo único x en $[a, b]$.

3.4.1.- TEOREMA DE CONVERGENCIA DE PUNTO FIJO.- Si $x_0 \in [a, b]$

entonces la sucesión definida por

$$x_n = g(x_{n-1}), \quad n \geq 1$$

converge al único punto fijo $x \in [a, b]$.

Demostración.- Existe un punto fijo $x_n \in [a, b]$. Por el T.V.M. y la desigualdad anterior

$$|x_n - x| = |g(x_{n-1}) - g(x)| \leq |g'(c)| |x_{n-1} - x| < k |x_{n-1} - x|$$

$$\text{También: } |x_{n-1} - x| = |g(x_{n-2}) - g(x)| \leq |g'(c)| |x_{n-2} - x| < k |x_{n-2} - x|$$

$$\text{Luego: } |x_n - x| \leq k^2 |x_{n-2} - x| \leq \dots \leq k^n |x_n - x|$$

Como $k < 1$ se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} k^n |x_n - x| = 0 \quad \text{o sea:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

3.5.- EJERCICIOS

1.- Si $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$. Sean las funciones $g(x)$:

$$\text{i) } g_1(x) = (3 + x - 2x^2)^{1/4}$$

$$\text{ii) } g_2(x) = \left(\frac{x + 3 - x^4}{2} \right)^{1/2}$$

$$\text{iii) } g_3(x) = \left(\frac{x+3}{x^2+2}\right)^{1/2}$$

$$\text{iv) } g_4(x) = \frac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}$$

Efectúe 4 iteraciones en cada una de las funciones $g(x)$ definidas anteriormente. Tome $x_0 = 1$ y $x_{n+1} = g(x_n)$ para $n = 0, 1, 2, 3$

2.- Use el método de iteración de punto fijo para determinar una solución con $\varepsilon = 10^{-2}$ si:

$$2\operatorname{sen}\pi x + x = 0 \text{ en } [1, 2] \text{ y } x_0 = 1$$

3.- Demostrar que $g(x) = 2^{-x}$ tiene un punto fijo único en $[\frac{1}{3}, 1]$. Use el método de iteración de punto fijo para determinar una solución con $\varepsilon = 10^{-4}$. R. 0.6412053

4.- Demostrar que $g(x) = \pi + 0.5\operatorname{sen}x$ tiene un punto fijo único en $[0, 2\pi]$. Use el método de iteración de punto fijo para determinar una solución con $\varepsilon = 10^{-2}$.

5.- Para la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$. Por el método de iteración de punto fijo determinar la solución en $[1, 2]$ con $\varepsilon = 10^{-2}$. R. $x_3 = 1.3231$; $g(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$; $x_0 = 1.5$

6.- Use el método de iteración de punto fijo para determinar una aproximación a $\sqrt{3}$ para $\varepsilon = 10^{-4}$

7.- Use el método de iteración de punto fijo para determinar una aproximación a $\sqrt[3]{25}$ para $\varepsilon = 10^{-4}$. R. $x_{14} = 2.92399$; $g(x) = \frac{5}{\sqrt{x}}$; $x_0 = 2.5$

Para los ejercicios 8 – 13. Determinar un intervalo $[a, b]$ en el cual la iteración de punto fijo converja, luego por el método de iteración de punto fijo hallar la solución para $\varepsilon = 10^{-5}$

8.-

$$x = \frac{2 - e^x + x^2}{3}$$

9.-

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}e^x}$$

10.-

$$x = 5^{-x}$$

11.-

$$x = 6^{-x}$$

12.-

$$x = 1.75 + \frac{4x-7}{x-2}$$

13.-

$$x = \frac{5}{x^2} + 2$$

Para los ejercicios 14 – 17. Determinar una función $g(x)$ y un intervalo $[a, b]$ que cumpla el teorema de existencia y unicidad de punto fijo. Por el método de iteración de punto fijo hallar la solución:

14.- Solución positiva si:

$$3x^2 - e^x = 0 \quad ; \quad \text{para } \varepsilon = 10^{-5}$$
$$\text{R. } g(x) = \sqrt{\frac{1}{3}e^x} \quad ; \quad [0, 1] \quad ; \quad x_0 = 0.5 \quad ; \quad x_{14} = 0.91001$$

15.- Solución positiva si:

$$x - \cos x = 0 \quad ; \quad \text{para } \varepsilon = 10^{-5}$$
$$\text{R. } g(x) = \cos x \quad ; \quad [0, 1] \quad ; \quad x_0 = 0.5 \quad ; \quad x_{28} = 0.7390817$$

16.- Solución diferente a cero (5 iteraciones).

$$\sin\sqrt{x} - \frac{x}{2} = 0$$

17.- Solución (5 iteraciones):

$$x^x + 2x - 6 = 0$$

18.- Dada la ecuación $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ y sean las funciones $g(x)$:

$$g(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{2} \quad ; \quad g(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 1}$$

a) verificar cual de las $g(x)$ cumple el teorema de existencia y unicidad de punto fijo.

b) Por el método de iteración de punto fijo hallar la solución para $\varepsilon = 0.01$

19.- Encuentre los ceros de $f(x) = x^2 + 10\cos x$. Usando el método de iteración de punto fijo para una función apropiada $g(x)$ encuentre los ceros para $\varepsilon = 10^{-4}$.

20.- Halle la solución negativa más cerca de cero, con un error de $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-2}$ si la ecuación es:

$$4e^{-x} \cos x - 1 = 0$$

Por el método de iteración de punto fijo.

R: -1,5146348

3.6.- METODO DE NEWTON - RAPHSON

$f \in C^2[a, b]$ y x^* una aproximación de x con $f'(x^*) \neq 0$ tal que $|x^* - x| \rightarrow \text{pequeño}$.

Consideremos el polinomio de Taylor de grado uno en una vecindad de \bar{x} .

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2} f''(\xi(x))(x - x^*)^2$$

Como $f(x) = 0$ y despreciando el último término se tiene:

$$x = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}; \text{ y es una mejor aproximación que } x^*$$

El método de newton genera una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n \geq 1$$

El proceso se detiene cuando dado $\varepsilon > 0$

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

3.7.- EJERCICIOS

Para los ejercicios 1 – 4. Hallar la solución para $\varepsilon = 10^{-4}$ en los intervalos dados usando el método de Newton.

1.-

$$x^3 - 2x^2 - 5 = 0 ; [1, 4]$$

$$\text{R. } x_0 = 2.5 ; x_4 = 2.6906475$$

2.-

$$x^3 + 3x^2 - 1 = 0 ; [-4, 0]$$

$$\text{R. } x_0 = -1 ; x_3 = -0.65270365$$

3.-

$$x - \cos x = 0 ; [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{R. } x_0 = 0.7854 ; x_3 = 0.7390851$$

4.-

$$x - 0.8 - 0.2 \sin x = 0 ; [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{R. } x_0 = 0.7854 ; x_3 = 0.9643339$$

Para los ejercicios 5 – 8. Hallar la solución para $\varepsilon = 10^{-5}$, usando el método de Newton.

5.-

$$x = \frac{2 - e^x + x^2}{3}$$

6.-

$$3x^2 - e^x = 0$$

7.-

$$e^x + 2^{-x} + 2 \cos x - 6 = 0$$

8.-

$$x^2 + 10 \cos x = 0$$

9.- Aproxime una raíz por medio el método de Newton, con un error de $\varepsilon = 10^{-5}$ de la ecuación $x^3 - 10x + 1 = 0$ en $[0,1]$. R: 0.1001002

10.- La ecuación $f(x) = \ln(x^2 + 1) - e^{0.4x} \cos \pi x$, tiene una raíz negativa e infinitas positivas. Demostrarlo gráficamente. Calcular por el método de newton la raíz positiva más próxima al origen (5 iteraciones).

11.- Sea la ecuación $\cos x + (1 + x^2)^{-1} = 0$

a) cuantas soluciones tiene en el intervalo $(0, +\infty)$?

b) Por el método de newton hallar la solución mas cercana al origen (4 iteraciones).

12.- Calcular una aproximación de $\sqrt{3}$ para $\varepsilon = 10^{-4}$, por el método de newton con $x_0 = 2$.

13.- Resolver $4 \cos x = e^x$ para $\varepsilon = 10^{-4}$, por el método de newton con $x_0 = 1$.

14.- Usando el método de Newton hallar la raíz real positiva del polinomio $x^3 + 3x - 1 = 0$ con un error de $\varepsilon = 0.5 * 10^{-2}$. R: 0.3222223

15.- a) Deseamos calcular una solución de la ecuación $(x - 3) \tan x - 1 = 0$ en el intervalo $[-6, 9]$, con un error de $\varepsilon = 0.005$, utilizando el método de Newton, con $x_0 = 2.9$

b) El número de soluciones reales en el intervalo $I = [-6, 9]$ es...

R: a) -0.2946867, b) 5

3.8.- SISTEMAS NO LINEALES.

El sistema se representa por:

$F : R^n \rightarrow R^n$; $F(x) = (f_1, \dots, f_n)^t$ donde las $f_i : R^n \rightarrow R$ son funciones coordenadas de F .

En notación vectorial para las variables x_1, \dots, x_n el sistema asume la forma :

$$F(x) = 0$$

Osea:

$$\begin{aligned}f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\f_2(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\\vdots \\f_n(x_1, \dots, x_n) &= 0\end{aligned}$$

3.8.1.- METODO DE NEWTON.

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ \vdots \\ x_n^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix} - \left[JF \begin{pmatrix} x_1^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix} \right]^{-1} F \begin{pmatrix} x_1^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix} \text{ donde } JF \begin{pmatrix} x_1^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix} \text{ es el jacobiano de } F$$

El proceso termina cuando:

$$|x_1^k - x_1^{k-1}| < \varepsilon \wedge \dots \wedge |x_n^k - x_n^{k-1}| < \varepsilon$$

3.9.- EJERCICIOS

1.- Resolver para $\varepsilon < 10^{-5}$ con $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$x^2 - 10x + y^2 + 8 = 0$$

$$xy^2 + x - 10y + 8 = 0$$

R: (1,1)

2.- Resolver para $\varepsilon < 10^{-5}$ con $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$x^2 + y^2 - x = 0$$

$$x^2 - y^2 - y = 0$$

R: (0.7718, 0.4196)

3.- Resolver para $\varepsilon < 10^{-5}$ con $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$

$$3x^2 - y^2 = 0$$

$$3xy^2 - x^3 - 1 = 0$$

R: (0.5, 0.8660)

4.- Resolver para $\varepsilon < 10^{-5}$ con $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$\frac{1}{2} \sin(xy) - \frac{y}{4\pi} - \frac{x}{2} = 0$$

$$\left(1 - \frac{1}{4\pi}\right)(e^{2x} - e) + \frac{e}{\pi}y - 2ex = 0$$

R: (-0.3812, 0)

5.- Resolver para $\varepsilon < 10^{-5}$ con $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$x^2 - 10x + y^2 + 8 = 0$$

$$xy^2 + x - 10y + 8 = 0$$

R: (1,1)

En los ejercicios 6 - 8. Primero localizar las soluciones, luego calcular la solución indicada, (4 iteraciones):

6.- Hallar la raíz más alejada del origen, del sistema:

$$y = x^2 - x$$

$$y - x = 1$$

7.- Hallar al menos una raíz del sistema:

$$y + x^2 = 2$$

$$y^2 - 2x = 1$$

R: (2.0652 , -2.265)

8.- Hallar la raíz positiva del sistema:

$$x^2 - 2y = 8$$

$$xy = 1$$

3.10.- METODO DE PUNTO FIJO.-

Definición.- Una función $G : D \subset R^n \rightarrow R^n$ tiene un punto fijo en $p \in D$ si

$$G(p) = p$$

Teorema.- sea $D = \{(x_1, \dots, x_n) : a_i \leq x_i \leq b_i\}$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$ donde a_i, b_i son constantes. Supongamos que $G : D \subset R^n \rightarrow R^n$ es una función continua con primeras derivadas parciales continuas con la propiedad de que $G(x) \in D$ para $x \in D$. Entonces G tiene un punto fijo en D .

Además, supongamos que existe una constante $k < 1$ con la propiedad:

$$\left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{K}{n} \text{ siempre que: } x \in D, \text{ para cada } j = 1, 2, \dots, n \text{ y cada componente } g_i.$$

Entonces la sucesión $\{x^k\}_{k=0}^\infty$ definida por $x^0 \in D$ seleccionada arbitrariamente y generada por: $x^k = G(x^{k-1})$ para $k \geq 1$ converge al punto fijo único $p \in D$.

3.11.- EJERCICIOS

1.- Demostrar que la función $F : R^3 \rightarrow R^3$ definida por;

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, x_1 \cos x_2, x_2^2 + x_3)^t$$

Es continua en cada punto de R^3 .

2.- El sistema no lineal:

$$x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0$$

$$x_1 x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0$$

Puede transformarse al problema de punto fijo

$$x_1 = g_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 8}{10}$$

$$x_2 = g_2(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2^2 + x_1 + 8}{10}$$

a) demostrar que $G = (g_1, g_2)$ tiene un único punto fijo en

$$D = \{(x_1, x_2)^t : 0 \leq x_1, x_2 \leq 1.5\}$$

b) aproximar la solución por punto fijo.

$$R. x^0 = (0,0)^t; x^6 = (0.999328, 0.999329)^t$$

3.- demostrar que $G : R^3 \rightarrow R^3$ tiene un único punto fijo en D , y aproximar la solución para $\varepsilon = 10^{-4}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$

$$G(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\cos(x_2 x_3) + 0.5}{3}, \frac{1}{25} \sqrt{x_1^2 + 0.3125} - 0.03, -\frac{1}{20} e^{x_1 x_2} - \frac{10\pi - 3}{60} \right)^t$$

$$D = \{(x_1, x_2, x_3)^t : -1 \leq x_i \leq 1; i = 1, 2, 3\}$$

$$R. x^0 = (1, 1, 1)^t; x^4 = (0.5000000, 0.000000, -0.5235988)^t$$

4.- demostrar que $G : R^3 \rightarrow R^3$ tiene un único punto fijo en D , y aproximar la solución para $\varepsilon = 10^{-4}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$

$$G(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{7.17 + 3x_2^2 + 4x_3}{12}, \frac{11.54 + x_3 - x_1^2}{10}, \frac{7.631 - x_2^3}{7} \right)^t$$

$$D = \{(x_1, x_2, x_3)^t : 0 \leq x_i \leq 1.5; i = 1, 2, 3\}$$

$$R. x^0 = (0, 0, 0)^t; x^9 = (1.200425, 1.100663, 0.9000712)^t$$

5.- demostrar que $G : R^3 \rightarrow R^3$ tiene un único punto fijo en D , y aproximar la solución para $\varepsilon = 10^{-4}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$

$$G(x_1, x_2, x_3) = (1 - \cos(x_1 x_2 x_3), 1 - (1 - x_1)^{1/4} - 0.05x_3^2 + 0.15x_3, x_1^2 + 0.1x_2^2 - 0.01x_2 + 1)^t$$

$$D = \{(x_1, x_2, x_3)^t : -0.1 \leq x_1 \leq 0.1; -0.1 \leq x_2 \leq 0.3; 0.5 \leq x_3 \leq 1.1\}$$

$$R. x^0 = (0.05, 0.2, 0.8)^t; x^3 = (0.000000, 0.1001078, 1.000007)^t$$

6.- demostrar que $G : R^3 \rightarrow R^3$ tiene un único punto fijo en D , y aproximar la solución para $\varepsilon = 10^{-4}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$

$$G(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{3} \cos(x_2 x_3) + \frac{1}{6}, -\frac{1}{9} \sqrt{x_1^2 + \sin x_3} + 1.06 - 0.1, -\frac{1}{20} e^{-x_1 x_2} - \frac{10\pi - 3}{60} \right)^t$$

$$D = \{(x_1, x_2, x_3)^t : -1 \leq x_i \leq 1; i = 1, 2, 3\}$$

$$R. x^0 = (0, 0, 0)^t; x^4 = (0.4981453, -0.1996048, -0.5288248)^t$$

CAPITULO 4 SISTEMAS LINEALES

4.1.- INTRODUCCION.- Los sistemas de ecuaciones lineales son una de las herramientas matemáticas de modelaje más comunes en las aplicaciones. Una clasificación común de los sistemas lineales es por su tamaño. Los sistemas con $O(100)$ variables se consideran pequeños y usualmente se utilizan los llamados métodos directos para su solución. Los sistemas de $O(1000)$ ó más variables se consideran

grandes o de gran escala y los métodos de solución más eficientes por lo general son los llamados métodos iterativos o indirectos.

Otra clasificación importante de los sistemas lineales es por la cantidad o densidad de ceros de la matriz de coeficientes. Los sistemas con pocas entradas distintas de cero se llaman escasos. De lo contrario decimos que el sistema es denso.

Definición.- Una norma sobre R^n es una aplicación $\| \cdot \| : R^n \rightarrow R$ con las siguientes propiedades:

- a) $\|x\| \geq 0$
- b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|; \alpha \in R$
- d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

4.2.- NORMAS PARA VECTORES.- Las más usuales R^n en son:

- a) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ norma ciudad bloque
- b) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ norma euclidiana
- c) $\|x\|_\infty = \max_{i=0, \dots, n} |x_i|$ norma de convergencia uniforme

4.3.- NORMAS PARA MATRICES $n \times m$.-

- a) $\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$
- b) $\|A\|_2 = \sqrt{\text{valor.propio.mas.grande.de } A^T A}$
- c) $\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$

4.4.- ESTABILIDAD DE UN ALGORITMO.- Un algoritmo se dice estable en la resolución de un cierto problema, si la solución computada x_c está próxima a la solución exacta x del problema.

4.5.- ALGORITMO ESTABLE PARA UN SISTEMA LINEAL.- Un algoritmo para la resolución de un sistema lineal será estable si la solución computada x_c es solución exacta de un problema próximo, es decir, de: $(A + \Delta A)x_c = b + \Delta b$ con $\Delta A, \Delta b$ pequeños.
Para medir la “pequeñez” de vectores y matrices utilizamos las normas ya vistas.

4.6.- CONDICION DE UN SISTEMA LINEAL.- Un problema con respecto a un conjunto de datos se dice mal condicionado si una pequeña modificación relativa a dichos datos causa una gran modificación relativa en la solución. Caso contrario el problema es bien condicionado

Si un problema está mal condicionado, la estabilidad del algoritmo a utilizar no será garantía de buenos resultados. (los resultados malos no son culpa del método si no del problema).

Ejemplo: sea el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Cuya solución exacta es: - 71.9997696 ; 99.999712

Perturbando el sistema se tiene

$$\begin{pmatrix} 0.32 & 0.24 \\ 0.24 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.01 \\ 1.999 \end{pmatrix}$$

Cuya solución es: - 4.603125 ; 10.3458 muy diferente ala solución anterior. El sistema es mal condicionado.

4.7.- NUMERO DE CONDICION.- sea $Ax = b$ si perturbamos A por ΔA la solución es $x + \Delta x$

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$$

$$A\Delta x = Ax - Ax - \Delta A(x + \Delta x)$$

$$A^{-1}A\Delta x = -A^{-1}\Delta A(x + \Delta x)$$

$$\Delta x = -A^{-1}\Delta A(x + \Delta x)$$

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta A\| \|x + \Delta x\|$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

si perturbamos b por Δb la solución es $x + \Delta x$

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

$$Ax = b \Rightarrow \|A\| \|x\| \geq \|b\| \Rightarrow \|x\| \leq \frac{\|b\|}{\|A\|}$$

$$Ax = b \Rightarrow \Delta x = A^{-1}\Delta b \Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta b\|$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Luego: $Cond(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$

4.7.1.- PROPIEDADES.-

- a) $Cond(A) \geq 1$
- b) $Cond(I) = 1$
- c) $Cond(\alpha A) = Cond(A); \alpha \in R$

4.8.- METODOS DIRECTOS.

4.8.1.- ALGORITMO DE GAUSS.- Consideremos el siguiente sistema lineal nxn

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$

El algoritmo de gauss consiste en:

Primer paso:

Si:

$$\begin{aligned}a_{11} &\neq 0 \\l_{i1} &= \frac{a_{i1}}{a_{11}}; i = 2, \dots, n \\L_{ij} &= L_{ij} - l_{i1} * L_{1j} \quad ; \quad i = 2, \dots, n \\&\quad j = 2, \dots, n+1\end{aligned}$$

Cuando $a_{11} = 0$ se intercambian filas.

Obtenemos el sistema lineal equivalente:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{22}^1x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2^1 \\&\vdots \\a_{n2}^1x_2 + \dots + a_{nn}^1x_n &= b_n^1\end{aligned}$$

Segundo paso:

Si:

$$\begin{aligned}a_{22}^1 &\neq 0 \\l_{i2} &= \frac{a_{i2}^1}{a_{22}^1}; i = 3, \dots, n \\L_{ij} &= L_{ij} - l_{i2} * L_{2j} \quad ; \quad i = 3, \dots, n \\&\quad j = 3, \dots, n+1\end{aligned}$$

Cuando $a_{22}^1 = 0$ se intercambian filas.

Se repite el procedimiento hasta obtener un sistema triangular de ecuaciones.

$$\begin{aligned}r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + \dots + r_{1,n-1}x_{n-1} + r_{1n}x_n &= c_1 \\r_{22}x_2 + \dots + r_{2,n-1}x_{n-1} + r_{2n}x_n &= c_2 \\&\vdots \\r_{n-1,n-1}x_{n-1} + r_{n-1,n}x_n &= c_{n-1} \\r_{nn}x_n &= c_n\end{aligned}$$

Por sustitución hacia atrás se tiene:

$$x_n = \frac{c_n}{r_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{c_{n-1} - r_{n-1,n}x_n}{r_{n-1,n-1}}$$

$$\vdots$$

$$x_1 = \frac{c_1 - \sum_{j=2}^n r_{1j}x_j}{r_{11}}$$

4.8.2.- DESCOMPOSICION LU.-

Descomposición $A = LU$ de una matriz A de orden N :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \ddots & & \vdots \\ & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1N} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2N} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{NN} \end{pmatrix}$$

Fila 1 de U.-

$$u_{1j} = a_{1j}; j = 1, \dots, N$$

Columna 1 de L.-

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}; i = 2, \dots, N$$

Fila 2 de U.-

$$u_{2j} = a_{2j} - l_{21}u_{1j}; j = 2, \dots, N$$

Columna 2 de L.-

$$l_{i2} = \frac{a_{i2} - l_{i1}u_{12}}{u_{22}}; i = 3, \dots, N$$

n-ésima fila de U.-

$$u_{nj} = a_{nj} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kj}; j = n, \dots, N$$

n-ésima columna de L.-

$$l_{in} = \frac{a_{in} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{ik}u_{kn}}{u_{nn}}; i = n+1, \dots, N$$

OBS: $l_{ij} = 1; i = j$

4.8.3.- METODO DE CHOLESKY.-

Sea $A_{n \times n} = LL'$ definida positiva donde L es triangular superior:

Paso 1.-

$$\text{Tomar } l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

Paso 2.-

$$l_{j1} = a_{j1} l_{11} \text{ para } j = 2, \dots, n$$

Paso 3.-

Para $i = 2, \dots, n$ seguir los pasos 4 y 5

Paso 4.-

$$l_{ii} = [a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2]^{1/2}$$

Paso 5.-

Para $j = i + 1, \dots, n$

$$l_{ji} = \frac{1}{l_{ii}} [a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik}]$$

Paso 6.-

$$l_{nn} = [a_{nn} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{nk}^2]^{1/2}$$

Los elementos de $U = L^t$; $u_{ij} = l_{ji}$; $i \leq j \leq n$; $1 \leq i \leq n$

4.9.- METODOS ITERATIVOS.-

4.9.1.- METODO DE JACOBI.- forma matricial

D matriz diagonal cuya diagonal es la misma que A

$-L$ la parte triangular estrictamente inferior de A

$-U$ la parte triangular estrictamente superior de A

Osea: $Ax = b$ o $(D - L - U)x = b$ se transforma en:

$$x^k = D^{-1}(L + U)x^{k-1} + D^{-1}b; k = 1, 2, \dots$$

En la práctica el método de jacobi consiste en resolver la i -ésima ecuación de $Ax = b$ para x_i , si $a_{ii} \neq 0$ el método genera los vectores x_i^k para $k \geq 1$ mediante:

$$x_i^k = \frac{\sum_{j=1}^n -a_{ij}x_j^{k-1} + b_i}{a_{ii}}; i = 1, 2, \dots, n$$

Criterio de paro.- cuando dado $\varepsilon > 0$ cumple:

$$\frac{\|x^k - x^{k-1}\|_{\infty}}{\|x^k\|_{\infty}} < \varepsilon$$

4.9.2.- METODO DE GAUSS – SEIDEL.-

forma matricial.-

$$x^k = (D - L)^{-1}Ux^{k-1} + (D - L)^{-1}b; k = 1, 2, \dots$$

En la práctica el método de gauss-seidel consiste en resolver la i -ésima ecuación de $Ax = b$ para x_i , si $a_{ii} \neq 0$ el método genera los vectores x_i^k para $k \geq 1$, utilizando los valores calculados mas recientemente, mediante:

$$x_i^k = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} -a_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{k-1} + b_i}{a_{ii}}; i = 1, 2, \dots, n$$

Criterio de paro.- cuando dado $\varepsilon > 0$ cumple:

$$\frac{\|x^k - x^{k-1}\|_{\infty}}{\|x^k\|_{\infty}} < \varepsilon$$

4.9.3.- CRITERIOS DE CONVERGENCIA.-

Teorema.- Si A es estrictamente dominante diagonalmente, entonces, para cualquier elección de x^0 ambos métodos, el de jacobí o el de gauss-seidel, dan lugar a sucesiones $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ que convergen a la solución de $Ax = b$.

Teorema.- Si para cualquier $x^0 \in R^n$, la sucesión $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ definida por $x^k = Tx^{k-1} + b$ para $k \geq 1$ y $b \neq 0$ converge a la solución única de $x = Tx + b$ si y solo si el radio espectral de $\rho(T) < 1$.

4.10.- EJERCICIOS

Para los ejercicios 1 – 3. Hallar $\| \|_{\infty} y \| \|_2$

1.-

$$x = (20, -15, 0, 30)^t$$

2.-

$$x = (-20, -10, 10, 5, 1)^t$$

3.-

$$x = (\text{sen } k, \cos k, 2^k)^t \text{ para un entero positivo fijo } k$$

Para los ejercicios 4 – 6. Calcular el número de condición:

4.-

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{use } \| \|_1$$

5.-

$$\begin{pmatrix} 1.003 & 58.09 \\ 5.550 & 321.8 \end{pmatrix} \quad \text{use } \| \|_2$$

6.-

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 \\ 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \quad \text{use } \| \|_{\infty}$$

7.- Hallar la condición del sistema lineal con $\| \|_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.000011 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.00003 \end{pmatrix}$$

¿ El sistema es mal condicionado?

8.- Hallar la condición del sistema lineal con $\| \cdot \|_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.000011 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.00001 \\ 3.00003 \end{pmatrix}$$

¿ El sistema es mal condicionado?

9.- Hallar la condición del sistema lineal con $\| \cdot \|_\infty$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.000011 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.00011 \\ 3.00003 \end{pmatrix}$$

¿ El sistema es mal condicionado?

10.- Para los ejercicios 7 – 9. Hallar la condición del sistema lineal perturbando A , b , o ambos.

Para los ejercicios 1 – 4. Resolver por el algoritmo de Gauss:

11.-

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11$$

$$4x_1 + x_2 - x_3 = 6$$

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3$$

$$R. 2.2, -1.6, 2.9$$

12.-

$$2x_1 + 4x_2 - x_3 = -5$$

$$x_1 + x_2 - 3x_3 = -9$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$

$$R. 1.0, -1.0, 3.0$$

13.-

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$3x_1 - 2x_2 = 6$$

14.-

$$x_1 - x_2 + x_4 = 2$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4$$

$$3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3$$

Para los ejercicios 1 – 4. factorizar las matrices en la descomposición LU.

15.-

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 0 & 0 & & 2 & -1 & 1 \\ \text{R. L=} & 1.5 & 1 & 0 & ; & \text{U=} & 0 & 4.5 & 7.5 \\ & 1.5 & 1 & 1 & & 0 & 0 & -4 \end{array}$$

16.-

$$\begin{array}{ccc} & 2 & -1.5 & 3 \\ & -1 & 0 & 2 \\ & 4 & -4.5 & 5 \\ \text{R. L=} & 1 & 0 & 0 & & 2 & -1.5 & 3 \\ & -0.5 & 1 & 0 & ; & \text{U=} & 0 & -0.75 & 3.5 \\ & 5 & 2 & 1 & & 0 & 0 & -8 \end{array}$$

17.-

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1.5 & 0 & 0 \\ & 0 & -3 & 0.5 & 0 \\ & 2 & -2 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \text{R. L=} & 0.5 & 1 & 0 & 0 & ; & \text{U=} & 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ & 0 & -2 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ & 1 & -1.3333 & 2 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Para los ejercicios 18 – 21. Resolver los sistemas lineales por descomposición LU

18.-

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4 \end{aligned}$$

19.-

$$\begin{aligned} 1.012x_1 - 2.132x_2 + 3.104x_3 &= 1.984 \\ -2.132x_1 + 4.096x_2 - 7.013x_3 &= -5.049 \\ 3.104x_1 - 7.013x_2 + 0.014x_3 &= -3.895 \end{aligned}$$

20.-

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -1 \\ -x_2 + 2x_3 &= 1.5 \end{aligned}$$

21.-

$$0.5x_1 + 0.25x_2 = 0.35$$

$$0.35x_1 + 0.8x_2 + 0.4x_3 = 0.77$$

$$0.25x_2 + x_3 + 0.5x_4 = -0.5$$

$$x_3 - 2x_4 = -2.25$$

Para los ejercicios 22 – 25. Factorizar las matrices por Cholesky.

22.-

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{R. } L = \begin{bmatrix} 1.41423 & 0 & 0 \\ -0.7071069 & 1.224743 & 0 \\ 0 & -0.8164972 & 1.154699 \end{bmatrix}$$

23.-

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{R. } L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1.658311 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.7537785 & 1.087113 & 0 \\ 0.5 & 0.4522671 & 0.08362442 & 1.240346 \end{bmatrix}$$

24.-

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{R. } L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1.658311 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.4522671 & 2.132006 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9380833 & 1.766351 \end{bmatrix}$$

25.-

$$\begin{array}{cccc} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{array}$$

$$R. \quad L = \begin{array}{cccc} 2.449489 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8164966 & 1.825741 & 0 & 0 \\ 0.4082483 & 0.3651483 & 1.923538 & 0 \\ -0.4082483 & 0.1825741 & -0.4678876 & 1.606574 \end{array}$$

Encontrar las cuatro primeras iteraciones por el método de GAUSS-SEIDEL

$$x_1 - x_2 = 0$$

26.-

$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -1$$

$$-x_2 + 2x_3 = 1.5$$

$$0.5x_1 + 0.25x_2 = 0.35$$

27.-

$$0.35x_1 + 0.8x_2 + 0.4x_3 = 0.77$$

$$0.25x_2 + x_3 + 0.5x_4 = -0.5$$

$$x_3 - 2x_4 = -2.25$$

CAPITULO 5 DIFERENCIACION E INTEGRACION NUMERICA

5.1.- DIFERENCIACION NUMERICA.-

5.1.1.- FORMULAS DE TRES PUNTOS.-

$$a) \quad f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^2}{3} f'''(\varepsilon_0)$$

para $x_0 < \varepsilon_0 < x_0 + 2h$

$$b) \quad f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6} f'''(\varepsilon_1)$$

para $x_0 - h < \varepsilon_1 < x_0 + h$

5.1.2.- FORMULAS DE CINCO PUNTOS.-

$$a) \quad f'(x_0) = \frac{1}{12h}[f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\varepsilon)$$

b)

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[-25f(x_0) + 48f(x_0 + h) - 36f(x_0 + 2h) + 16f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 4h)] + \frac{h^4}{5} f^{(5)}(\varepsilon)$$

para $x_0 < \varepsilon < x_0 + 4h$

5.1.3.- FORMULA PARA DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR.-

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} [f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\varepsilon)$$

para $x_0 - h < \varepsilon < x_0 + h$

5.2.- EJERCICIOS

1.- Con las fórmulas de tres puntos completar las tablas siguientes

a)

x	$f(x)$	$f'(x)$
-0.3	-0.20431	
-0.1	-0.08993	
0.1	0.11007	
0.3	0.39569	

x $f'(x)$
 -0.3 0.35785
 R. -0.1 0.78595
 0.1 1.2141
 0.3 1.64422

b)

x	$f(x)$	$f'(x)$
1.1	0.48603	
1.2	0.86160	
1.3	1.59751	
1.4	3.76155	

x $f'(x)$
 1.1 1.9540
 R. 1.2 5.5574
 1.3 14.500
 1.4 28.781

2.- Con las formulas de cinco puntos y los datos de la tabla:

X	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
f(x)	0.9798652	0.9177710	0.8080348	0.6386093	0.3843735

Calcular:

- a) $f'(0.2)$
- b) $f'(1.0)$
- c) $f'(0.6)$

3.- Se tiene los datos:

X	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
f(x)	0.9798652	0.9177710	0.8080348	0.6386093	0.3843735

a) Con las fórmulas apropiadas calcular $f'(0.4)$ y $f''(0.4)$

b) Con las fórmulas apropiadas calcular $f'(0.6)$ y $f''(0.6)$

$$f'(0.4)$$

$$h = 0.6 \quad -0.8889958$$

$$h = 0.4 \quad -0.6979043$$

$$R. \quad h = 0.2 \quad -0.5486810$$

$$h = -0.2 \quad -0.3104710$$

$$h = 0.2 \quad -0.3994578$$

$$h = 0.2 \quad -0.4295760$$

$$f''(x)$$

$$h = 0.2 \quad -1.191050$$

$$f'(0.6)$$

$$h = 0.4 \quad -1.059153$$

$$h = 0.2 \quad -0.8471275$$

$$h = -0.2 \quad -0.5486810$$

$$R. \quad h = -0.4 \quad -0.4295760$$

$$h = 0.2 \quad -0.6351018$$

$$h = -0.2 \quad -0.6677860$$

$$h = 0.4 \quad -0.7443646$$

$$h = 0.2 \quad -0.6979043$$

$$h = 0.2 \quad -0.6824175$$

$$f''(0.6)$$

$$h = 0.4 \quad -1.573943$$

$$h = 0.2 \quad -1.492233$$

4.- Sea $f(x) = x^3 e^{x^2} - \sin x$. Para $h = 0.1$ y $h = 0.01$, hallar $f'(2.19)$ con las fórmulas de tres puntos.

5.- Sea $f(x) = 3xe^x - \cos x$. Para los datos de la tabla, calcular $f''(1.3)$ con $h = 0.1$ y $h = 0.01$.

X	1.20	1.29	1.30	1.31	1.40
f(x)	11.59006	13.78176	14.04276	14.30741	16.86187

Compare con los valores exactos.

6.- Sea $f(x) = 2^x \sin x$. Para los datos de la tabla, calcular $f'(1.05)$ por la fórmula de tres puntos con $h = 0.05$ y $h = 0.01$.

X	1.0	1.04	1.06	1.10
f(x)	1.6829420	1.7732994	1.8188014	1.9103448

$$R. \quad 2.27403 ; 2.27510$$

7.- Suponga que los datos siguientes se han obtenido experimentalmente:

x	1.00	1.01	1.02
f(x)	1.27	1.32	1.38

a) Hallar $f'(1.005)$ y $f'(1.015)$ con la fórmula de tres puntos.

b) Hallar $f''(1.01)$ con la fórmula de tres puntos y los resultados de a).

$$R. f'(1.005) \approx 5.0 \quad f'(1.015) \approx 6.0 \quad f''(1.01) \approx 100$$

5.3.- INTEGRACION NUMERICA.

5.3.1.- INTRODUCCION.- En este capítulo estudiaremos algunos métodos numéricos para estimar el valor de una integral definida

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Integral en la cual el intervalo de integración $[a, b]$ es finito, y f es una función de una variable real y valor real continua en $[a, b]$.

Según el teorema fundamental del cálculo, para una función f con las características indicadas antes, existe una antiderivada F de f en $[a, b]$, es decir, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

El problema para usar los métodos analíticos de integración es que, es posible que F no se pueda expresar en términos de funciones elementales, o aunque F se conozca explícitamente, ésta no se pueda evaluar fácilmente.

Algunos ejemplos de tales integrales:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^3} dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^5} dx$$

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$$

$$\int_1^5 e^{-x^2} dx$$

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x+1} dx$$

$$\int_0^{\pi/4} x \tan x dx$$

$$\int_2^3 \frac{1}{\ln x} dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x^2) dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x^2) dx$$

$$\int_0^1 \sqrt[3]{1+x^3} dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} dx$$

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x+x^2} dx$$

$$\int_0^1 (9-x^2)^{1/3} dx$$

$$\int_0^1 \sqrt{\tan x} dx$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x} dx$$

lo anterior motiva el uso de los métodos de integración numérica que estudiaremos en lo que sigue; los primeros que consideraremos se basan en la aproximación de la función f mediante polinomios de interpolación.

5.4.- FORMULA DE CUADRATURA (CERRADA) DE NEWTON COTES.-

Supongamos que queremos estimar el valor de:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Empezamos dividiendo el intervalo $[a, b]$ en N subintervalos de igual longitud, $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_k, x_{k+1}]$, ..., $[x_{N-1}, x_N]$, donde los $N+1$ puntos x_0, x_1, \dots, x_N de la partición se obtienen a partir de la fórmula: $x_k = a + kh$; $k = 0, 1, \dots, N-1$ siendo $h = \frac{b-a}{N}$

donde h es el tamaño de paso.

Nótese que $x_0 = a$; $x_N = b$; y que $h = x_{k+1} - x_k$; para $k = 0, 1, \dots, N-1$

Ahora bien si $P_N(x) = \sum_{j=0}^N f(x_j)L_j(x)$ es el polinomio de interpolación de Lagrange

para la función f en los nodos x_0, x_1, \dots, x_N , entonces se obtiene:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_N(x)dx = \int_a^b \sum_{j=0}^N f(x_j)L_j(x)dx = \sum_{j=0}^N f(x_j) \int_a^b L_j(x)dx$$

5.5.- FORMULA DE LOS TRAPECIOS.- La función f se aproxima en cada subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ mediante el polinomio de interpolación lineal de lagrange

Como el polinomio de interpolación de lagrange es:

$$P_1(x) = f(x_k) \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + f(x_{k+1}) \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \text{ entonces:}$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} P_1(x)dx = f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} dx + f(x_{k+1}) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} dx$$

$$= \left[f(x_k) \frac{(x - x_{k+1})^2}{2(x_k - x_{k+1})} + f(x_{k+1}) \frac{(x - x_k)^2}{2(x_{k+1} - x_k)} \right]_{x_k}^{x_{k+1}}$$

$$= -f(x_k) \frac{(x_k - x_{k+1})^2}{2(x_k - x_{k+1})} + f(x_{k+1}) \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2(x_{k+1} - x_k)}$$

$$= (x_{k+1} - x_k) \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$$

ancho * altura promedio

como $h = x_{k+1} - x_k$ así que: $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \frac{h}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})]$

generalizando la fórmula de los trapecios se tiene:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})]$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) \right]$$

5.5.1.- ERROR EN LA FORMULA DE LOS TRAPECIOS.- El error que se comete al aplicar la fórmula de los trapecios sobre todo el intervalo $[a, b]$, es:

$$|E_T| = \left| -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \right| = \left| -h^2 \frac{b-a}{12} f''(\xi) \right| \text{ para } \xi \in (a, b)$$

El resultado anterior se indica escribiendo $E_T = O(h^2)$.

La fórmula del error indica que si f es una función lineal, entonces la fórmula de los trapecios es exacta.

5.6.- FORMULA DE SIMPSON (1/3).- Se aproxima la función f en un subintervalo

$[x_k, x_{k+2}]$,

$k = 0, 2, \dots, N-2$ mediante un polinomio de interpolación de lagrange de grado dos,

usando los nodos x_k, x_{k+1}, x_{k+2} . Observe que, en este caso, el número de

subintervalos N debe ser par, $N \geq 2$.

$$P_2(x) = f(x_k) \frac{(x - x_{k+1})(x - x_{k+2})}{(x_k - x_{k+1})(x_k - x_{k+2})} + f(x_{k+1}) \frac{(x - x_k)(x - x_{k+2})}{(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_{k+2})} + f(x_{k+2}) \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{(x_{k+2} - x_k)(x_{k+2} - x_{k+1})}$$

$$\text{Entonces: } \int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})]$$

Luego:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{N-2}}^{x_N} f(x) dx$$

$$= \frac{h}{3} \{ [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \dots + [f(x_{N-2}) + 4f(x_{N-1}) + f(x_N)] \}$$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 4 \sum_{k=0}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k+1}) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} f(x_{2k}) \right]$$

5.7.- FORMULA DE SIMPSON (3/8).- Se aproxima la función f en un subintervalo

$[x_k, x_{k+3}]$,

$k = 0, 2, \dots, N-3$ mediante un polinomio de interpolación de lagrange de grado tres,

usando los nodos $x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}$. Observe que, en este caso, el número de

subintervalos N , debe ser múltiplo de tres.

$$P_3(x) = f(x_k) \frac{(x - x_{k+1})(x - x_{k+2})(x - x_{k+3})}{(x_k - x_{k+1})(x_k - x_{k+2})(x_k - x_{k+3})} + f(x_{k+1}) \frac{(x - x_k)(x - x_{k+2})(x - x_{k+3})}{(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_{k+2})(x_{k+1} - x_{k+3})} +$$

$$+ f(x_{k+2}) \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})(x - x_{k+3})}{(x_{k+2} - x_k)(x_{k+2} - x_{k+1})(x_{k+2} - x_{k+3})} + f(x_{k+3}) \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})(x - x_{k+2})}{(x_{k+3} - x_k)(x_{k+3} - x_{k+1})(x_{k+3} - x_{k+2})}$$

$$\text{Entonces: } \int_{x_k}^{x_{k+3}} f(x) dx = \frac{3h}{8} [f(x_k) + 3f(x_{k+1}) + 3f(x_{k+2}) + f(x_{k+3})]$$

Luego:

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_6} f(x)dx + \dots + \int_{x_{N-3}}^{x_N} f(x)dx \\
&= \frac{3h}{8} \{ [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] + [f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + f(x_6)] + \dots \\
&\quad + [f(x_{N-3}) + 3f(x_{N-2}) + 3f(x_{N-1}) + f(x_N)] \} \\
I &= \int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8} \left[f(a) + f(b) + 3 \sum_{k=0}^{\frac{N-3}{3}} f(x_{3k+1}) + 3 \sum_{k=0}^{\frac{N-3}{3}} f(x_{3k+2}) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N-3}{3}} f(x_{3k}) \right]
\end{aligned}$$

5.8.- EJERCICIOS

Use las fórmulas simples de trapecio y de simpson para calcular las siguientes integrales. Compare las soluciones con los resultados exactos.

1.-

$$\int_1^2 \ln x dx$$

2.-

$$\int_1^{0.1} x^{1/3} dx$$

3.-

$$\int_0^{\pi/3} (\sin x)^2 dx$$

4.-

$$\int_{0.2}^{0.4} e^{3x} \cos 2x dx$$

5.-

$$\int_0^{\pi/4} \tan x dx$$

6.-

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \cot x dx$$

	<i>Trapecio</i>	<i>Simpson</i>	<i>Real</i>
1	0.34657	0.38583	0.38629
2	0.023208	0.032296	0.034812
R. 3	0.39270	0.30543	0.30709
4	0.39914	0.40371	0.40376
5	0.39270	0.34778	0.34657
6	-0.39270	-0.34778	-0.34657

7. Con los datos de la tabla:

x	e^x
1.1	3.0042
1.3	3.6693
1.5	4.4817

calcular:

$$\int_{1.1}^{1.5} e^x dx; \text{ a) por trapecios con } x_0 = 1.1 ; x_1 = 1.5$$

b) por simpson (1/3) con $x_0 = 1.1 ; x_1 = 1.3; x_2 = 1.5$.

Para los ejercicios 8 – 13. Calcular las integrales usando las fórmulas:

a) Trapecios ; $n = 1$

b) Simpson 1/3; $n = 2$

c) Simpson 3/8 ; $n = 3/8$

8.-

$$\int_0^{0.1} \sqrt{1+x} dx$$

R. b) 0.1024597 ; c) 0.1024596

9.-

$$\int_0^{\pi/2} (\text{sen} x)^2 dx$$

R. b) 0.785397 ; c) 0.785397

10.-

$$\int_{1.1}^{1.5} e^x dx$$

R. b) 1.477534 ; c) 1.477526

11.-

$$\int_1^{10} \frac{1}{x} dx$$

R. b) 2.740906 ; c) 2.563390

12.-

$$\int_1^{5.5} \frac{1}{x} dx + \int_{5.5}^{10} \frac{1}{x} dx$$

R. b) 2.407900 ; c) 2.359771

13.-

$$\int_0^1 x^{1/3} dx$$

R. b) 0.695800 ; c) 0.712603

Para los ejercicios 14 – 19. Calcular las integrales usando la fórmula general de trapecios. Compare las soluciones con los resultados exactos.

14.-

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} ; n = 4$$

R. 1.1167 ; exacto. 1.09861

15.-

$$\int_0^2 x^3 dx ; n = 4$$

R. 4.25 ; exacto. 4

16.-

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x^2} dx ; n = 6$$

R. 10.3122 ; exacto. 10.20759

17.-

$$\int_0^1 \sin \pi x dx ; n = 6$$

R. 0.62201 ; exacto. 0.636620

18.-

$$\int_0^{2\pi} x \sin x dx ; n = 8$$

R. -5.9568 ; exacto. -6.28319

19.-

$$\int_0^1 x^2 e^x dx ; n = 8$$

R. 0.72889 ; exacto. 0.718282

20.- Use la fórmula general de simpson 1/3 para los ejercicios 14 -19.

21.- Use la fórmula general de simpson 3/8 para los ejercicios 16 y 17.

22.- Con los datos de la tabla:

x	$f(x)$
1.8	3.120
2.0	4.425
2.2	6.042
2.4	8.030
2.6	10.46

Calcular: $\int_{1.8}^{2.6} f(x)dx$ por trapecios y simpson (1/3).

23. Calcular el área comprendida entre:

$$y = 2 + \ln x \quad ; \quad \text{eje } X \quad ; \quad x = 2$$

Por simpson 1/3 con $N = 4$, use cuatro decimales.

24. Calcular el valor de “c” si:

$$\int_1^4 (x^2 + c)dx = 27 \quad , \quad N = 6 \quad \text{Por simpson (1/3)}$$

5.9.- METODOS NUMERICOS PARA INTEGRAL DOBLE:

Resolución por el método de simpson(1/3) para $N = 2$.

$$I = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx \quad \text{Hacemos: } G(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx$$

$$\text{luego: } I = \int_a^b G(x) dx = \frac{h_x}{3} [G(x_0) + 4G(x_1) + G(x_2)]$$

$$h_x = \frac{b-a}{N} \quad \text{paso en dirección del eje } X$$

$$G(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y) dy = \frac{h_y}{3} [f(x_0, y_{00}) + 4f(x_0, y_{01}) + f(x_0, y_{02})]$$

$$h_y = \frac{\varphi_2(x_0) - \varphi_1(x_0)}{N} \quad \text{paso en dirección del eje } Y, \text{ con el cual se calcula; } y_{00}; y_{01}; y_{02}$$

$$G(x_1) = \int_{\varphi_1(x_1)}^{\varphi_2(x_1)} f(x_1, y) dy = \frac{h_y}{3} [f(x_1, y_{10}) + 4f(x_1, y_{11}) + f(x_1, y_{12})]$$

$$h_y = \frac{\varphi_2(x_1) - \varphi_1(x_1)}{N} \quad \text{paso en dirección del eje } Y, \text{ con el cual se calcula; } y_{10}; y_{11}; y_{12}$$

$$G(x_2) = \int_{\varphi_1(x_2)}^{\varphi_2(x_2)} f(x_2, y) dy = \frac{h_y}{3} [f(x_2, y_{20}) + 4f(x_2, y_{21}) + f(x_2, y_{22})]$$

$h_y = \frac{\varphi_2(x_2) - \varphi_1(x_2)}{N}$ paso en dirección del eje Y , con el cual se calcula; $y_{20}; y_{21}; y_{22}$

OBS: Se procede de la misma forma para los métodos de los trapecios y simpson 3/8.

5.10.- EJERCICIOS

Para los ejercicios 1 – 3. calcular las integrales dobles por Trapecios:

1.-

$$\int_{2.1}^{2.2} \int_{1.3}^{1.4} xy^2 dy dx ; n = 2$$

2.-

$$\int_{1.3}^{1.5} \int_{-0.1}^{0.1} \sqrt{x} y^2 dy dx ; n = 2$$

3.-

$$\int_{-0.1}^{0.1} \int_0^{0.1} xy e^{x^2+y^2} dy dx ; n = 2$$

Para los ejercicios 4 – 6. Calcular las integrales dobles por Simpson 1/3:

4.-

$$\int_0^{0.1} \int_0^{0.1} e^{y-x} dy dx ; n = 2$$

5.-

$$\int_{2.0}^{2.2} \int_x^{2x} (x^2 + y^2) dy dx ; n = 2$$

6.-

$$\int_{1.0}^{1.1} \int_0^x (x^2 + \sqrt{y}) dy dx ; n = 2$$

Para los ejercicios 7 y 8. Calcular las integrales dobles por Simpson 3/8:

7.-

$$\int_0^1 \int_0^x (y \sin \sqrt{x}) dy dx ; n = 3$$

8.-

$$\int_{-\pi}^{3\pi/2} \int_0^{2\pi} (y \sin x + x \cos y) dy dx ; n = 3$$

9.- Use la fórmula de simpson(1/3) para aproximar:

$$\iint_R e^{-(x+y)} dA ; N=2$$

donde R es la región acotada por las curvas $y = x^2 ; y = \sqrt{x}$
R: 0.1479099

10.- Use la fórmula de los trapecios y aproxime la integral:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$$

Usando los valores de f dados en la tabla:

y	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
x					
0.00	0	0	0	0	0
0.25	0	8.113	8.994	8.113	0
0.50	0	7.005	10.722	8.704	0
0.75	0	4.921	6.779	5.184	0
1.00	0	0	0	0	0

11.- En la integral doble:

$$\iint_R \sqrt{xy + y^2} dA ; N = 6$$

donde R es la región limitada por: $x = 3 ; 3y - x = 2 ; 3x - y = 2$

Calcular $G(x_3)$ por el método de los trapecios,

12.- En la integral doble:

$$\int_{1.0}^{1.1} \int_0^x (x^2 + \sqrt{y}) dy dx ; n = 6$$

Calcular $G(x_4)$ por simpson (3/8)

CAPITULO 6

PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON VALOR INICIAL.

6.1.- INTRODUCCION.-

Definición.- la función $f(x, y)$ satisface la condición de Lipschitz para la variable "y" en $D \subset R^2$, si existe una constante $L > 0$ con la propiedad:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

(x, y_1) y $(x, y_2) \in D$

L se llama condición de lipschitz de f .

Teorema.- sea $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty\}$ y $f(x, y)$ continua en D para " y ", entonces el problema de condición inicial:

$$y' = f(x, y); a \leq x \leq b$$

$$y(a) = \alpha$$

Tiene una única solución $y(x)$ para $a \leq x \leq b$

6.2.- METODO DE EULER.

$$y_0 = \alpha$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \quad ; k = 0, 1, \dots, n-1$$

6.3.- METODO DE EULER MODIFICADO.

$$y_0 = \alpha$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))] \quad ; k = 0, 1, \dots, n-1$$

6.4.- METODO DE TAYLOR DE ORDEN "n".

$$y_0 = \alpha$$

$$y_{k+1} = y_k + hT^n(x_k, y_k) \quad ; k = 0, 1, \dots, n-1$$

Donde: $T^n(x_k, y_k) = f(x_k, y_k) + \frac{h}{2}f'(x_k, y_k) + \dots + \frac{h^{n-1}}{n!}f^{(n-1)}(x_k, y_k)$

6.5.- METODO DE RUNGE – KUTTA DE ORDEN CUATRO.

$$y_0 = \alpha$$

$$k_1 = f(x_k, y_k)$$

$$k_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2}{2}) \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$k_4 = f(x_{k+1}, y_k + k_3)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

6.6.- PROBLEMAS DE CONDICION INICAIL DE ORDEN SUPERIOR Y SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES:

$$Y'''' + Ay''' + By'' + Cy' + Ey = g; a \leq x \leq b$$

$$y(a) = y_0; y'(a) = y_0'; y''(a) = y_0''; y'''(a) = y_0'''$$

Hacemos:

$$u = y'; v = y''; w = y'''$$

Se obtiene:

$$w' + Aw + Bv + Cu + Ey = g$$

Luego se debe resolver el sistema de ecuaciones diferenciales con valor inicial:

$$y' = u ; y(a) = y_0$$

$$u' = v ; u(a) = y_0'$$

$$v' = w ; v(a) = y_0''$$

$$w' = g - Aw - Bv - Cu - Ey ; w(a) = y_0'''$$

6.7.- EJERCICIOS

Para los ejercicios 1 - 7. Hallar la condición de Lipschitz en los problemas de valor inicial.

1.-

$$y' = y \cos x ; 0 \leq x \leq 1$$

$$y(0) = 1$$

2.-

$$y' = \frac{2y}{x} + x^2 e^x ; 1 \leq x \leq 2$$

$$y(1) = 0$$

3.-

$$y' = -\frac{2y}{x} + x^2 e^x ; 1 \leq x \leq 2$$

$$y(1) = \sqrt{2e}$$

4.-

$$y' = x^3 \cos xy ; 0 \leq x \leq 1$$

$$y(0) = 1$$

5.-

$$y' = x^2 y + 1 ; 0 \leq x \leq 1$$

$$y(0) = 1$$

6.-

$$y' = xy ; 0 \leq x \leq 1$$

$$y(0) = 1$$

7.-

$$y' = 1 - y ; 0 \leq x \leq 1$$

$$y(0) = 1$$

Para los ejercicios 8 – 11. Use el método de Euler con $N = 4$ para aproximar los siguientes problemas de valor inicial, graficar la solución y solución exacta.

8.-

$$y' = x^2 \quad ; \quad x \in [0, 2] \\ y(0) = 0$$

9.-

$$y' = -xy \quad ; \quad x \in [0, 4] \\ y(0) = 4$$

10.-

$$y' = xy \quad ; \quad x \in [0, 2] \\ y(0) = 1$$

11.-

$$y' = 2x \quad ; \quad x \in [0, 2] \\ y(0) = 1$$

Para los ejercicios 12 – 15. Use el método de Euler para aproximar la solución de los siguientes problemas de valor inicial.

12.-

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right) \quad ; \quad x \in [1, 1.2] \\ y(1) = 1 \quad ; \quad h = 0.1$$

	x_i	y_i
R.	1.1	1.2
	1.2	1.4281

13.-

$$y' = \operatorname{sen} x + e^{-x} \quad ; \quad x \in [0, 1] \\ y(0) = 0 \quad ; \quad h = 0.5$$

	x_i	y_i
R.	0.5	0.5
	1.0	1.04298

14.-

$$y' = \frac{y^2 + y}{x} \quad ; \quad x \in [1, 3] \\ y(1) = -2 \quad ; \quad h = 0.5$$

	x_i	y_i
	1.5	-1.0
R.	2.0	-1.0
	2.5	-1.0
	3.0	-1.0

15.-

$$y' = -xy + \frac{4x}{y} ; x \in [0, 1]$$

$$y(0) = 1 ; h = 0.25$$

	x_i	y_i
	0.25	1.0000
R.	0.50	1.1875
	0.75	1.4601
	1.00	1.7000

16.- Dado el problema de valor inicial

$$y' = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2, \quad x \in [1, 2]$$

$$y(1) = -1$$

cuya solución exacta es: $y(x) = -\frac{1}{x}$.

Use el método de Euler Modificado con $h = 0.2$ para aproximar la solución y compárela con los valores reales de $y(x)$.

17. Dado el problema inicial

$$y' = \frac{2}{x}y + x^2e^x ; x \in [1, 2]$$

$$y(1) = 0$$

cuya solución exacta es: $y(x) = x^2(e^x - e)$.

Use el método de Euler modificado, con $h = 0.2$ graficar la solución y solución exacta.

Para los ejercicios 18 – 21. Use el método de Taylor de orden dos para aproximar la solución:

18.-

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right) ; x \in [1, 1.2]$$

$$y(1) = 1 ; h = 0.1$$

	x_i	y_i
R.	1.1	1.214999
	1.2	1.465250

19.-

$$y' = \operatorname{sen} x + e^{-x} ; x \in [0, 1]$$

$$y(0) = 0 ; h = 0.5$$

	x_i	y_i
R.	0.5	0.50000
	1.0	1.076858

20.-

$$y' = \frac{y^2 + y}{x} ; x \in [1, 3]$$

$$y(1) = -2 ; h = 0.5$$

	x_i	y_i
	1.5	-2.000000
R.	2.0	-1.777776
	2.5	-1.585732
	3.0	-1.458882

21.-

$$y' = -xy + \frac{4x}{y} ; x \in [0, 1]$$

$$y(0) = 1 ; h = 0.25$$

	x_i	y_i
	0.25	1.093750
R.	0.50	1.312319
	0.75	1.538468
	1.00	1.720480

Para los ejercicios 22 – 26. Use el método de Taylor de orden cuatro, para aproximar la solución:

22.-

$$y' = x + y ; x \in [0, 2]$$

$$y(0) = -1 ; h = 0.5$$

23.-

$$y' = 1 - y ; x \in [0, 2]$$

$$y(0) = 0 ; h = 0.5$$

24.-

$$y' = -y + x + 1 ; x \in [0, 2]$$

$$y(0) = -1 ; h = 0.5$$

25.-

$$y' = 1 + y ; x \in [0, 2]$$

$$y(0) = 0 ; h = 0.5$$

26.-

$$y' = \cos x + e^{-x} ; x \in [1, 2]$$

$$y(1) = 2, ; h = 0.2$$

(5 iteraciones)

En los ejercicios 27 – 30. Use el método de Runge- Kutta de orden cuatro para aproximar la solución:

27.-

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right) ; x \in [1, 1.2]$$

$$y(1) = 1 ; h = 0.1$$

	x_i	y_i
R.	1.1	1.21588
	1.2	1.46755

28.-

$$y' = \operatorname{sen} x + e^{-x} ; x \in [0, 1]$$

$$y(0) = 0 ; h = 0.5$$

	x_i	y_i
R.	0.5	0.515898
	1.0	1.09184

29.-

$$y' = \frac{y^2 + y}{x} ; x \in [1, 3]$$

$$y(1) = -2 ; h = 0.5$$

	x_i	y_i
	1.5	-1.49541
R.	2.0	-1.33056
	2.5	-1.24804
	3.0	-1.19850

30.-

$$y' = -xy + \frac{4x}{y} ; x \in [0, 1]$$

$$y(0) = 1 ; h = 0.25$$

	x_i	y_i
	0.25	1.087168
R.	0.50	1.289921
	0.75	1.513531
	1.00	1.701786

31.- Se tiene el problema de condición inicial:

$$y' = \frac{1}{x^2} ; x \in [1, 5]$$

$$y(1) = 1, N = 4$$

a) completar:

x_i	Método de euler y_i	Valor real y_R	Error $ y_i - y_R $
1			
2			
3			
4			
5			

b) graficar aproximadamente ambas soluciones.

32.- Sea el problema de condición inicial:

$$y' = Ae^x + y ; x \in [0, 0.9]$$

$$y(0) = 2, y'(0) = 3 ; h = 0.3$$

Por el método de Runge-Kutta. Hallar y_3

Para los ejercicios 33 – 39. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de orden superior, por el método de Euler. (cinco iteraciones)

33.-

$$y'' + 2xy' + x^2y = e^x ; x \in [0, 2]$$

$$y(0) = 1, y'(0) = -1 ; h = 0.1$$

34.-

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x ; x \in [1, 2]$$

$$y(1) = 1, y'(1) = 0 ; h = 0.2$$

35.-

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = e^x ; x \in [0, 3]$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 2 ; y''(0) = 0 ; h = 0.1$$

36.-

$$y'' + 8y = 0 ; x \in [0, 3]$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 0 ; h = 0.1$$

37.-

$$y'' - 0.01(y')^2 + 2y = \sin x ; x \in [0, 3]$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1 ; h = 0.1$$

38.-

$$y'' + 2xy' + xy = 0 ; x \in [0, 3]$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 0 ; h = 0.1$$

39.-

$$(e^x + y)y'' = x ; x \in [0, 3]$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 0 ; h = 0.1$$

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.
(cinco iteraciones)

40.-

$$u_1' = 3u_1 + 2u_2 ; x \in [0, 1] ; u_1(0) = 0$$

$$u_2' = 4u_1 + u_2 ; x \in [0, 1] ; u_2(0) = 1 ; h = 0.1$$

41.-

$$u_1' = -4u_1 - 2u_2 + \cos x + 4\sin x ; x \in [0, 2] ; u_1(0) = 0$$

$$u_2' = 3u_1 + u_2 - 3\sin x ; x \in [0, 2] ; u_2(0) = -1 ; h = 0.1$$

42.-

$$u_1' = u_2 ; x \in [0, 1] ; u_1(0) = 3$$

$$u_2' = -u_1 + 2e^{-x} + 1 ; x \in [0, 1] ; u_2(0) = 0$$

$$u_3' = -u_1 + e^{-x} + 1 ; x \in [0, 1] ; u_3(0) = 1 ; h = 0.1$$

ANEXO - CAPITULO 7

7 EJEMPLOS Y EJERCICIOS CON MATLAB

7.1.- REPRESENTACION DE UN POLINOMIO.

$$y = 5x^3 + x^2 + 3x + 4$$

```
>> p = [5 1 3 4]
```

Raíces.

```
>> r = roots (p)
```

7.1.1.- EVALUACION DE UN POLINOMIO.

$$y = 5x^3 + x^2 + 3x + 4$$

y(2.2) = ?

```
>> p = [5 1 3 4]
```

```
xi = 2.2;
```

```
yi = polyval(p, xi)
```

7.1.2.- AJUSTE DE POLINOMIOS.

Sea : >> x = [1.1, 2.5, 3.6, 5.2]

```
y = [3.665, 4.367, 4.341, 2.017]
```

```
a = polyfit(x, y, length(x)-1)
```

a = aparecen los coeficientes del polinomio

7.2.- GRAFICOS BIDIMENSIONALES.

```
1. >> x = [3 6 1 5 8]
    x = 3   6   1   5   8
    plot(x)

2. >> x = [3 5 2 1 4]; y = [2 0 3 4 1];
    plot(x, y)

3. >> x = [-10: 0.2 : 10]; y = sin(x);
    >> close
    >> plot(x, y)
    >> grid
    >> xlabel('x'); ylabel('y')

4. >> x = 0 : pi/20 : 4*pi;
    >> y = sin(x); z = cos(x);
    >> plot(x, y, '.', x, z, '-')
    >> grid

5. Graficar:  $f(x) = \cos(x)\cosh(x) + 1$ 
clf; clear % o clg; clear
>> x = -5: 0.1:5;
>> y=cos(x).*cosh(x)+1;
>> plot(x, y);
>> grid
>> xlabel('x'); ylabel('y = cos(x)*cosh(x)+1') % esta línea es optativa
```

7.3.- INTERPOLACION.

```
1. >>x = [0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0]';
    >> y = [0.916, 0.8109, 0.6931, 0.5596, 0.4055]';
    >> xi = [0.27 0.53 0.65 0.77]'; % hallamos las imágenes de xi
    >> yi = interp1(x, y, xi, 'linear'); % usar solo linear o cubic
                                   'cubic'

    >> [xi,yi]
    % aparece el resultado
```

2.- GRAFICAS , INTERPOLACION CON POLINOMIOS DE GRADO 5 Y 10

```
x=0:10;
>> xx=0:0.1:10;
>> y=sin(x);
>> p5=polyfit(x,y,5);
>> p10=polyfit(x,y,10);
>> plot(x,y,'o',xx,polyval(p5,xx),'- ',x,y,'y',xx,polyval(p10,xx),'-')
```

7.4.- GRAFICA, SPLINES CON 3 y 5 PUNTOS

```
%spline cubico con 3 puntos
>> x = [2 3 5]; y = [1 0 4];
>> xx=2:0.1:5;
>> plot(xx,csapi(x,y,xx),'k-',x,y,'ro'), grid
>> title('spline con 3 puntos')
```



```
%spline cubico con 5 puntos
x = [1 1.5 2 4.1 5]; y = [1 -1 1 -1 1];
>> xx=1:0.1:5;
>> plot(xx,csapi(x,y,xx),'k-',x,y,'ro')
>> grid
>> title('spline cubico con 5 puntos')
```

7.4.1.- APLICACIÓN DEL SPLINE, GRAFICA DE UNA PIEZA

```
>> x1=[-2 -1.5 -1 -0.5 0 0.5 1 1.5 2];
>> y1=[0 0.4 0.8 1 1.4 1.8 2 2.5 5];
>> x2=[2 2.2 2.5 2.8 3];
>> y2=[5 4.5 4 3.5 3];
>> x3=[-2 -1 -0.5 0 1 1.5 2 2.5 3];
>> y3=[0 -0.2 -0.5 -1 0 1 1.5 1.6 3];
>> plot(x1,y1,'x',x2,y2,'+',x3,y3, '.') % dibujo del contorno
>> xx1=-2:0.1:2; %limites
>> xx2=2:0.1:3;
>< xx3=-2:0.1:3;
>> plot(xx1,csapi(x1,y1,xx1),'k-',x1,y1,'ro', xx2,csapi(x2,y2,xx2),'k-',x2,y2,'ro',
xx3,csapi(x3,y3,xx3),'k-',x3,y3,'ro')
%es una sola linea
```

7.5.- ECUACIONES NO LINEALES.

1. Ejemplo Gráfica:

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

```
x=-10:0.1:10;
f=x.^3-3*x+1;
close
plot(x,f)
grid
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
```

2. Calculo de la solución:

Con la instrucción **fzero**

```
x=-10:0.1:10;
>> f=inline('x^3-3*x+1');
>> fzero(f,1.3)
ans =
    1.5321
```

7.5.1.- ALGORITMO DE NEWTON.

1. Ejm: $0.5e^{\frac{x}{3}} - \sin x = 0$

Instrucciones para graficar.

```
x=[0:0.2:2];
>> y=[-0.3:0.2:0.3];
>> y=0.5*exp(x/3)-sin(x);
>> close
>> plot(x,y)
```

```
>> grid
XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX
function newton(f,x0,tol)
sym x; %convierte a x en variable simbólica para derivar f
df=diff(f,'x'); %deriva con respecto a x
f=inline(f);
df=inline(char(df)); %inline convierte a f y su derivada df en función que depende de x
%char transforma a la derivada como cadena de caracteres para poder
% definir como función
fprintf('\n it.      x      f(x)\n')
i=0;
fprintf('%3.0f %10.10f %10.10f\n',i,x0,f(x0))
x1=x0-f(x0)/df(x0);
while abs(x0-x1)>tol
    i=i+1;
    %contador de iteraciones
    fprintf('%3.0f %10.10f %10.10f\n',i,x1,f(x1))
    x0=x1;
    x1=x0-f(x0)/df(x0);
end
fprintf('\n la aproximacion de la raiz es: %3.10f\n',x1)
```

NOTA. Abrir la ventana con New/New- file .Guardar la función como newton.m en la ventana del editor.

Luego llamar desde la ventana commad Window la instrucción:
`newton('0.5*exp(x/3)-sin(x)',0,0.000001)`
 Donde la raíz inicial es x0=0, error= 0.000001

Resultado:
 >> newton('0.5*exp(x/3)-sin(x)',0,0.000001)

it.	x	f(x)
0	0.0000000000	0.5000000000
1	0.6000000000	0.0460589057
2	0.6740772595	0.0017921320
3	0.6772069270	0.0000034016
4	0.6772128900	0.0000000000

la aproximación de la raíz es: 0.6772128900

7.5.2.- SISTEMA DE ECUACIONES NO LINEALES

1. Con la instrucción **fsolve**

Ejemplo:

$$y - x^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

Gráfica del sistema:

```

a=-3:0.1:3; b=-3:0.1:3; [x,y]=meshgrid(a,b);
>> f1=y-x.^2; f2=x.^2+y.^2-4;
>> contour(x,y,f1,[0,0],'k'); hold on; grid on;
>> contour(x,y,f2,[0,0],'k');
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
2. Calculo de la solución:
%Función como archivo, escribir en el editor
function f=experimento(x)
f=[x(2)-x(1).^2;x(1).^2+x(2).^2-4]
% guardar como experimento.m
% x(1) = x, x(2) = y
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
>> X0=[1.3,1.4]; % raíz inicial (escribir en la ventana principal de windows)
>> X=fsolve('experimento',X0)
X =
    1.2496    1.5616

```

3. Segunda forma con la instrucción **fsolve**

Ejemplo:

```

% función como inline (escribir en la ventana principal de windows)
f=inline('[x(2)-x(1)^2;x(1)^2+x(2)^2-4]')
f =
    Inline function:
    f(x) = [x(2)-x(1)^2;x(1)^2+x(2)^2-4]
>> x=fsolve(f,[1.41,1.41],optimset('fsolve'))
x =
    1.2496    1.5616

```

7.6.- SISTEMAS LINEALES.

```

>> A = [3 2 1; 5 4 6; 7 8 9]
>> B = A           traspuesta de A
>> C = inv(A)       inversa de A
>> D = det(A)       determinante de A
>> E = A*B          producto de matrices
>> r = rank(A)       calcula el rango de Anxn
>> x = [6 3 4 7 1]  vector fila
>> y = [2 ; 4 ; 6 ; 1 ; 7] vector columna (también se puede escribir [ ]')

```

7.7.- NORMAS DE VECTORES Y MATRICES.-

Sea el vector: $x = (3, -2, 5, 6, 7)$

```

>> x = [3 -2 5 6 7]
>> norm(x, p)       con p = 1, 2, inf

```

Sea una matriz de orden cuatro:

```

>> A = [4 3 2 1; 5 -2 1 -1; 4 5 6 7; -1 -2 -6 -8]
>> norm(A, p)       con P = 1, 2, inf

```

7.8.- RESOLUCION DE SISTEMAS LINEALES:

$E = \text{rref}(A)$ reduce a la forma escalonada por Gauss
 $[l,u]=\text{lu}(A)$ descomposición L U
 $[l, u, p] = \text{lu}(A)$ descomposición L U
 $[Q, R]=\text{qr}(A)$ Descomposición QR de una matriz rectangular.
Para sistemas con más ecuaciones que incógnitas.
 $R = \text{chol}(A)$ factorización cholesky $A = R'R$

1. Ejm:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= -1 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Resolvemos por Gauss:

```
>> A = [3 2; 1 -1]
```

```
>> b = [-1 ; 1];
```

```
>> x = A \ b
```

Solución: $x_1 = 0.2$; $x_2 = 0.8$

2. Por descomposición L U:

```
>> [l, u, p] = lu(A)
```

se obtiene: $l = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.3333 & 1 \end{bmatrix}$ $u = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1.6667 \end{bmatrix}$ $p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Luego: $L = p'*l$

Se resuelve por gauss el sistema: $z = L \setminus b$ se obtiene. z_1, z_2

Finalmente se resuelve el sistema: $x = u \setminus z$ se obtiene la solución: x_1, x_2

7.9.- INTEGRACION NUMERICA.

(puede usar cualquiera de los tres ejemplos para resolver)

Ejemplos:

7.9.1.-CUADRATURA DE SIMPSON.

$$I = \int_0^{3\pi} e^{2x} (\sin x)^2 dx$$

function f = hcurve(x) % se grava en el editor con el nombre hcurve.m

f = exp(2*x).*(sin(x)).^2;

len = quad(@hcurve,0,3*pi) % se llama en la ventana principal de window

len =

17.2220

7.9.2.- METODO DE SIMPSON (1/3):

$$\int_0^2 \sqrt{1+e^x}$$

```
>> clear % simpson
```

```
>> Iexacta = 4.006994; % es la solución exacta
```

```
>> a=0; b=2; % los límites
```

```
>> fprintf('\n formula de simpson(1/3)\n');
```

```
>> fprintf('\n n I error\n');
```

```

>> n=1;
>> for k=1:4, n = 2*n;
h=(b-a)/n; i=1:n+1;
x=a+(i-1)*h; f=sqrt(1+exp(x)); % es la integral
I = (h/3)*(f(1) + 4*sum(f(2:2:n)) + f(n+1));
if n>2, I = I+(h/3)*2*sum(f(3:2:n)); end
fprintf(' %3.0f %10.5f %10.5f\n', n, I, Iexacta-I);
end

```

```

2  4.00791 -0.00092
4  4.00705 -0.00006
8  4.00700 -0.00000
16 4.00699 -0.00000

```

7.9.3.- METODO DE LOS TRAPECIOS:

$$\int_0^2 \sqrt{1+e^x}$$

```

>> clear; Iexacta=4.006994; % 'sol. exacta'
>> a=0; b=2; % los límites
>> fprintf('\n formula de trapecios\n');
>> fprintf('\n n      I      error\n');
>> n=1;
>> for k=1:6
n=2*n;
h=(b-a)/n; i=1:n+1;
x=a+(i-1)*h; f=sqrt(1+exp(x)); % es la integral
I=trapez_v(f,h);
fprintf(' %3.0f %10.5f %10.5f \n', n, I, Iexacta-I);
end
2  4.08358 -0.07659
4  4.02619 -0.01919
8  4.01180 -0.00480
16 4.00819 -0.00120
32 4.00729 -0.00030
64 4.00707 -0.00008

```

7.10.- PROBLEMAS DE CONDICION INICIAL.

Ejemplo de la gráfica de la solución y solución exacta de una E.D.O.

```

>> clear, clf, hold off
t=1; n=0; y=1; z=1;
h=0.1; % es el paso
t_rec(1)=t; y_rec(1)=y; z_rec(1)=z;
while t<=30
n=n+1;
y=y+h*(3*t/y*y + 1/t.^3); % método de euler
z=t.^2; % solución exacta
t=t+h;
y_rec(n+1) = y;

```

```

t_rec(n+1) = t;
z_rec(n+1) = z;
end
plot(t_rec, y_rec, t_rec, z_rec, '-')
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('velocidad (m/s)')

```

Nota. t es la variable independiente. Variables dependientes son y, z.

7.11.- PRACTICA EN LABORATORIO DE MATLAB

7.11.1 INTERPOLACION.

L 1.

X	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
F(x)	0.9162	0.8109	0.6931	0.5596	0.4055

- usando la instrucción polyfit aproximar $f(0.6)$
- graficar el polinomio de interpolación.
- Estime los valores de x que satisfacen $f(x) = 0.4137, 0.7233, 0.8501$.
Utilizando interp1

L 2. Determinar la curva spline. Grafique la curva con los puntos dados.

xx = [-1.00, -0.86, -0.50, 0.00, 0.50, 0.86, 1.00, 1.00, 1.04, 1.15, 1.13, 1.54, 1.82, 2.17, 2.58, 3.06]

yy = [0.00, -0.25, -0.43, -0.50, -0.43, -0.25, 0.00, 0.00, 0.15, 0.25, 0.30, 0.30, 0.30, 0.30, 0.30, 0.30]

7.11.2 ECUACIONES NO LINEALES.

L 3. determine gráficamente las soluciones de las siguientes ecuaciones:

- $0.5 \exp(x/3) - \sin(x) = 0; x > 0$
- $\sin(x) - 0.3e^x = 0; x > 0$
- $x + x^2 + 3x^{-1} - 40 = 0$

L.4. Resolver las siguientes ecuaciones con la instrucción fzero ó por el método de newton.

- $1564000 = 1000000e^x + \frac{435000}{x}(e^x - 1)$ para $\varepsilon = 0.0002$
- $y = (0.01x + 1)\sin(x) - (x - 0.01)/(x^2 + 1) - 0.0096$ para $\varepsilon = 0.0002$
- $e^{6x} + 3(\ln 2)^2 e^{2x} - \ln 8e^{4x} - (\ln 2)^3 = 0$ para $\varepsilon = 0.0002$
-

$$\frac{(2)(9.81)}{1000} = 1.4 * 10^{-5} v^{1.5} + 1.15 * 10^{-5} v^2$$

Determine v (velocidad) usando fzero ó (newton con un error de 0.001).

e)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.14 - 2 \log_{10} \left(\frac{e}{D} + \frac{9.35}{R_e \sqrt{f}} \right)$$

Hallar f con la instrucción fzero. ó (newton con un error de 0.00001):

D = 0.1, e = 0.0025, $R_e = 3 * 10^4$

f)

$$A \sin \alpha \cos \alpha + B \sin^2 \alpha - C \cos \alpha - E \sin \alpha = 0$$

donde :

$$A = l \sin \beta_1$$

$$B = l \cos \beta_1$$

$$C = (h + 0.5D) \sin \beta_1 - 0.5D \tan \beta_1$$

$$E = (h + 0.5D) \cos \beta_1 - 0.5D$$

1. Cuando $l = 89$, $h = 49$, $D = 55$ y $\beta_1 = 11.5^\circ$, El ángulo α es aproximadamente 33° . Verifique este resultado.
2. Encuentre α para la situación en la que l , h , β_1 , son los mismos que en a) pero $D = 30$

7.11.3.- SISTEMAS LINEALES:

L 1.- Hallar la normas 1, 2, inf del siguiente vector:

$$x = (9, 2, 8, -12, -9, 10, 20, 50, -100, -150)$$

L 2.- La instrucción `hilb(n)` genera una matriz. Hallar la condición de dicha matriz, para $n = 10$ con la norma 1, 2 e inf

L 3.- Para el sistema lineal: $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} -4 & 7 & 1 & -3 & 71 & 6 & 5 & -2 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & -6 & 3 & 5 & -60 & 9 & -8 & -4 & 7 \\ 3 & 53 & 2 & -7 & -6 & 4 & -9 & 8 & 5 & 1 \\ -9 & 3 & -5 & 8 & 2 & -1 & 7 & 4 & 6 & -61 \\ 7 & -5 & 4 & -6 & -1 & 2 & -8 & 51 & 9 & -3 \\ -5 & -8 & 2 & -50 & 9 & -7 & -3 & -1 & 6 & 4 \\ -48 & -1 & 3 & -7 & 9 & -2 & 4 & -6 & 8 & 5 \\ 1 & -9 & -63 & -2 & 8 & -3 & -6 & -7 & -4 & 5 \\ 8 & -6 & 1 & 4 & 7 & 3 & -46 & 2 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 9 & 5 & -3 & 8 & 6 & 4 & -73 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ -6 \\ -3 \\ -2 \\ 9 \\ -8 \\ 1 \\ -5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

- a) Hallar la condición del sistema con la norma inf
- b) Resolver por Gauss.
- c) Resolver por LU
- d) Resolver por Cholesky

L4.- Considere el sistema:

$$\begin{array}{rcl}
 2x_1 - x_2 & & = 1 \\
 -x_1 + 2x_2 - x_3 & & = 1 \\
 -x_2 + 2x_3 - x_4 & & = 1 \\
 -x_3 + 2x_4 - x_5 & & = 1 \\
 -x_4 + 2x_5 - x_6 & & = 1 \\
 -x_5 + 2x_6 - x_7 & & = 1 \\
 -x_6 + 2x_7 - x_8 & & = 1 \\
 -x_7 + 2x_8 - x_9 & & = 1 \\
 -x_8 + 2x_9 - x_{10} & & = 1 \\
 -x_9 + 2x_{10} & & = 1
 \end{array}$$

- a) Hallar la condición del sistema con la norma dos.
- b) resolver por el método de Gauss.
- c) resolver por descomposición L U

7.11.4.- INTEGRACIÓN NUMERICA.

Para los ejercicios L5 – L7. Calcular las integrales por el método de trapecios para $n = 2, 4, 8$ y 16 . Luego comparar con el valor exacto.

L5.-

$$\int_0^{\pi/4} \tan(x) dx$$

L6.-

$$\int_0^1 \exp(x) dx$$

L7.-

$$\int_0^1 \frac{1}{2+x} dx$$

Para los ejercicios L8 – L11. Calcular las integrales por el método simpson $1/3$ para $n = 2, 4, 8$ y 16 .

L8.-

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos(x)}$$

L9.-

$$\int_1^2 \frac{\log(1+x)}{x} dx$$

L10.-

$$\int_0^1 x^{-x} dx$$

L11.-

$$\int_0^{2\pi} \exp(2x) \sin^2(x) dx$$

NOTA. También puede usar el método directo del 1ª ejemplo

7.11.5.- PROBLEMAS DE CONDICION INICIAL

Para los ejercicios L12 – L14. Por el método de Euler graficar la solución numérica y la solución exacta.

L12.-

$$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} ; t \in [1, 20] ; h = 0.01$$

$$y(1) = 1$$

cuya solución exacta es: $y(t) = -1/t$

L13.-

$$y' = -y + t + 1 ; t \in [0, 20] ; h = 0.01$$

$$y(0) = 1$$

cuya solución exacta es: $y(t) = e^{-t} + t$

L14.-

$$y' = \frac{2y}{t} + t^2 e^t ; t \in [1, 20] ; h = 0.01$$

$$y(1) = 0$$

cuya solución exacta es: $y(t) = t^2 (e^t - e)$

BIBLIOGRAFIA

- 1 Análisis Numérico “ Richard L. Burden” Grupo Editorial Iberoamericana
- 2 Introducción al Análisis Numérico “ H.C. Muller S.C. ”
- 3 Métodos Numéricos con Software “ S. Nakamura ”
- 4 Métodos Numéricos con Matlab “ S. Nakamura ”